D. Boiangiu,
Gh. Paizi,
N. Enescu

# Elementele elastice ale mașinilor

EDITURA TEHNICĂ

Lucrarea tratează calculul, proiectarea, utilizarea și tehnologia de execuție a arcurilor de toate tipurile.

Cuprinde: materialele folosite la fabricarea arcurilor, arcurile în foi, arcurile bară de torsiune, arcurile spirale plane, arcurile elicoidale, arcurile inelare, arcurile-disc, arcurile speciale metalice (tuburi Bourdon, membrane, capsule, tuburi gofrate) și nemetalice, arcuri de cauciuc, arcuri pneumatice și amortizoare.

De asemenea, lucrarea se ocupă și de încercarea principalelor tipuri de arcuri mai des întîlnite în construcția de mașini.

Pentru fiecare tip de arc se dau și exemple de calcul.

Se adresează inginerilor proiectanți și tehnologilor din industria constructoare de mașini, fiind utilă și studenților institutelor tehnice.

Redactor responsabil: ing. NICOLAE UDEANU
Tehnoredactor: ELLY GORUN

*Dat la cules 17.10.1966. Bun de tipar 17.03.1967. Apărut 1967. Tiraj: 3.000+140. Broșate. Hîrtie tipar înalt tip A, 610×860/16. Coli editoriale 25,17. Coli de tipar 28,50. Planșe: tipar, 10. A 15.858/1966. C. Z. pentru bibliotecile mari 62-27. C. Z. pentru bibliotecile mici 62.*

Tiparul executat la Intreprinderea poligrafică Sibiu, str. N. Bălcescu nr. 17.
Republica Socialistă România
Comanda nr. 197

# PREFAȚĂ

*În stadiul actual al dezvoltării industriei constructoare de mașini, elementele elastice au o utilizare deosebit de largă.*

*Elementele elastice apar în componența celor mai importante mașini și instalații, iar studiul, proiectarea și construcția acestora constituie în general o problemă specifică. O deosebită atenție trebuie acordată elementelor elastice utilizate în dispozitivele de automatizare, la care precizia lor de funcționare are o mare însemnătate.*

*Dezvoltarea impetuoasă a tehnicii, proiectării și construcției de mașini din țara noastră, eforturile tot mai accentuate de a automatiza procesele de producție, au făcut să se simtă lipsa unei monografii care să trateze elementele elastice ale mașinilor și aparatelor. Deși în literatura noastră tehnică există o serie de lucrări referitoare la arcuri și la elemente elastice folosite în construcția de mașini, totuși se simte nevoia ca unele elemente elastice speciale, folosite în dispozitivele și instalațiile moderne, care în general nu au fost tratate pînă acum, să fie cunoscute mai în amănunt de către proiectanți, ingineri și tehnicieni.*

*În cadrul spațiului rezervat, autorii și-au propus ca, pe lîngă o tratare generală a problemelor construcției și folosirii elementelor elastice, să prezinte principalele rezultate practice și teoretice actuale, cunoscute în acest domeniu.*

*S-a insistat asupra elementelor elastice speciale utilizate în dispozitivele de automatizare.*

*Lucrarea se adresează inginerilor, proiectanților și tehnicienilor din sectorul construcții de mașini, fiind totodată utilă studenților și personalului didactic din învățămîntul tehnic.*

*În general, în lucrare problemele au fost expuse succint, căutîndu-se a se pune la dispoziția celor interesați rezultatele ce pot fi utile proiectanților și inginerilor ce utilizează aceste elemente.*

*Pentru a ușura orientarea proiectanților, precum și a inginerilor și tehnicienilor din exploatare, în lucrarea de față sînt prezentate numeroase tabele, nomograme, diagrame din care se pot extrage rezultatele necesare în mod operativ. În acest scop s-au folosit lucrări de specialitate din care s-au extras figuri, tabele etc. Lucrările de specialitate consultate de autori sînt indicate în bibliografia de la sfîrșitul cărții.*

*Autorii au lucrat în comun, munca de coordonare revenind tov. conf. ing. D. D. Boiangiu.*

AUTORII

# 1 Noțiuni introductive

## 1.1 Generalități

Organele de mașini care intră în componența mecanismelor, aparatelor și mașinilor se pot împărți în două mari grupuri:

— organe de mașini ale căror deformații în timpul funcționării mecanismului, aparatului sau mașinii sînt de nedorit; dintre acestea fac parte: pîrghiile mecanismelor, roțile dințate, arborii unor mașini, șuruburile conducătoare ale strungurilor etc.;

— organe de mașini ale căror deformații sînt necesare pentru buna funcționare a mecanismului, aparatului sau mașinii respective; acestea se numesc elemente elastice, din care fac parte și arcurile.

Noțiunea de element elastic este mai largă decît aceea de arc, arcurile fiind numai anumite tipuri de elemente elastice. Prin elementele elastice se realizează legătura elastică dintre diferite părți sau piese ale unei mașini, ale unui mecanism, aparat sau dispozitiv. Datorită formei și proprietăților elastice ale materialului din care sînt executate, acestea permit deformații elastice acceptabile sau corespunzătoare cerințelor, sub acțiunea forțelor exterioare. Elementele elastice au o largă utilizare în construcția de mașini și aparate, de exemplu:

— ca amortizoare de șocuri la suspensia vehiculelor de orice fel, tampoane, cîrlige de foraj, unele tipuri de cuplaje, frîne;

— ca elemente motoare utilizate pentru a reda energia acumulată cum sînt: arcurile de ceasornic, arcurile supapelor motoarelor cu ardere internă, arcurile unor arme de foc;

— pentru exercitarea unor forţe elastice permanente, la ambreiaje de fricţiune, întinzătoare;
— pentru măsurarea forţelor la dinamometre, cîntare, aparate de calibrat;
— pentru măsurarea unor parametri fizici prin transformarea acestora în forţe;
— pentru modificarea frecvenţei proprii şi amortizarea vibraţiilor la autovehicule, fundaţii, unele subansambluri sau organe de maşini;
— ca limitatori de forţe sau elemente de reglare la prese, ambreiaje, maşini sau cuplaje automate şi robinete de reglare.

## 1.2. Clasificarea arcurilor

Varietatea domeniilor de utilizare şi a formelor constructive ale elementelor elastice determină clasificarea lor după mai multe criterii. STAS 6916-64 stabileşte clasificarea şi terminologia pentru arcurile folosite în construcţia de maşini şi aparate.

După criteriul formei lor constructive, arcurile se clasifică în: arcuri în foi, elicoidale, disc, inelare, spirale plane, bare de torsiune şi speciale.

Terminologia arcurilor este dată în standard pe baza acestei clasificări.

După criteriul solicitării arcului (direcţia şi sensul forţelor exterioare), arcurile se clasifică în: arcuri de compresiune, de tracţiune şi de încovoiere.

Solicitarea arcului în ansamblu nu trebuie confundată cu solicitarea materialului din care el este executat (natura eforturilor din material). Astfel, materialul arcurilor elicoidale de compresiune şi tracţiune este solicitat la răsucire, materialul arcurilor elicoidale de torsiune este solicitat la încovoiere etc.

După criteriul secţiunii semifabricatului, arcurile se clasifică în: arcuri cu secţiune rotundă, dreptunghiulară, pătrată şi profilată.

După criteriul materialului elementului elastic, arcurile se clasifică în: arcuri de oţel, de metale neferoase, de materiale nemetalice.

După criteriul rolului lor funcţional în maşină sau aparat, arcurile se clasifică în: arcuri de amortizare, de acumulare de energie şi pentru exercitarea unei forţe de măsurare.

După criteriul rigidităţii lor, arcurile se clasifică în: arcuri cu rigiditate constantă şi arcuri cu rigiditate variabilă.



Materialele din care se execută elementele elastice trebuie să prezinte o serie de calităţi. Dintre acestea se menţionează: rezistenţa la rupere, rezistenţa la oboseală, limita de elasticitate—cît mai ridicate, o bună rezistenţă la coroziune şi la variaţiile de temperatură posibile în condiţiile de funcţionare.

În cap. 2 se tratează pe larg problemele privind proprietăţile fizice şi chimice ale materialelor pentru elemente elastice şi se fac recomandări privind alegerea şi utilizarea lor.

Ca în orice construcţie nouă şi în proiectarea elementelor elastice, problema principală care se pune este alegerea soluţiei care satisface cel mai bine condiţiile impuse de scop, la un preţ de cost cît mai redus. O cerinţă de bază pentru rezolvarea optimă a problemei este folosirea cît mai judicioasă a materialului în vederea asigurării solicitării cît mai uniforme şi alegerea unei forme economice care să permită acumularea unui lucru mecanic de deformaţii maxim, sub formă de energie potenţială, cu un volum de material minim.

## 1.3. Caracteristica elementelor elastice

Elementele elastice sînt solicitate de forţe sau momente care au valori constante sau variabile.

Cînd forţele sau momentele nu depăşesc limitele de elasticitate ale materialului, între acestea şi deformaţii există o anumită dependenţă, care poate fi exprimată printr-o relaţie de forma:

$$P=\varphi(f), \text{ sau } M\ \varphi\ (\theta),$$

în care: $P$ este sarcina, în kgf; $M$ — momentul, în kgf.cm; $f$ — deformaţia (săgeata), în cm; $\theta$ — deformaţia unghiulară, în rad.

Curba rezultată din reprezentarea grafică a acestei funcţii se numeşte caracteristica arcului.

Caracteristicile elementelor elastice pot fi liniare sau neliniare. În fig. 1.1 sînt reprezentate principalele tipuri de curbe caracteristice, pentru elementele elastice.

Raportul dintre creşterea sarcinii şi creşterea deformaţiei poartă denumirea de rigiditate şi se notează cu $c_r$:

$$c_r=\frac{\Delta P}{\Delta f} \text{ sau } c_r=\frac{\Delta M}{\Delta \theta}.$$

În fig. 1.1, *a* curba caracteristică *I* reprezintă cazul cînd $c_r$ este constant, iar curbele *II* şi *III* cazurile caracteristice cînd $c_r$ este variabil.

Uneori se folosește și noțiunea de flexibilitate a elementului elastic — îndeosebi la arcuri, care reprezintă inversul rigidității:

$$\delta = \frac{1}{c_r}$$

În fig. 1.1, *b* este reprezentată caracteristica reală a unui arc. Se observă diferența între caracteristica de încărcare și cea de descărcare a arcului.

Sub sarcină, elementele elastice se deformează, acumulînd lucru mecanic. Lucrul mecanic de deformare este suprafața cuprinsă între caracteristica elementului elastic și abscisă (fig. 1.1, *a* și fig. 1.2, *a* și *b*).

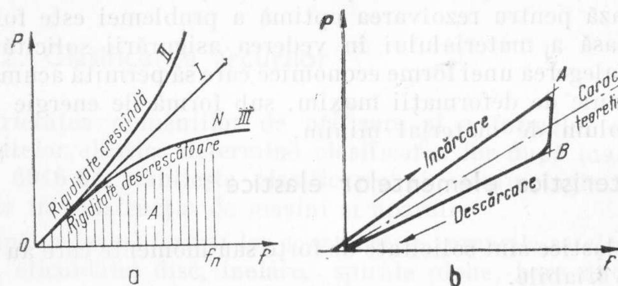



Fig. 1.1

Valoarea lucrului mecanic de deformare, pentru elementele elastice cu caracteristică neliniară, se obține prin integrarea suprafeței respective, adică:

— pentru solicitările la încovoiere (fig. 1.2, *a*):

$$L = \int_{f_1}^{f_2} P df;$$

— pentru solicitările la răsucire (fig. 1.2, *b*):

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta.$$

În cazul caracteristicilor liniare, lucrul mecanic de deformare este:

— pentru solicitări la încovoiere: $L = \frac{Pf}{2}$;

— pentru solicitări la răsucire: $L = \frac{M\theta}{2}$,

sau, ținînd seama de faptul că $c_r = \frac{P_1}{f_1} = \frac{P_2}{f_2} = \ldots = \frac{P_n}{f_n} = \operatorname{tg} \alpha$,



unde $\alpha$ este unghiul de înclinare a caracteristicii liniare:

$$L = \frac{c_r f^2}{2} \text{ și } L = \frac{c_r \theta^2}{2}$$

Dacă se înlocuiește săgeata, respectiv deformația unghiulară, cu valoarea sa în funcție de $\sigma_{max}$ sau $\tau_{max}$, se obține energia de deformare:

$$W = \eta \frac{V\sigma_{max}^2}{E} \text{ sau } W = \eta \frac{V\tau_{max}^2}{G},$$

după cum elementul elastic este solicitat la încovoiere sau răsucire. În aceste relații, $V$ este volumul elementului, $E$ și $G$ modulele de elasticitate longitudinal și transversal, iar $\eta$ este coeficientul de utilizare volumetrică, care indică gradul de utilizare a materialului pentru acumularea de lucru mecanic de deformare.

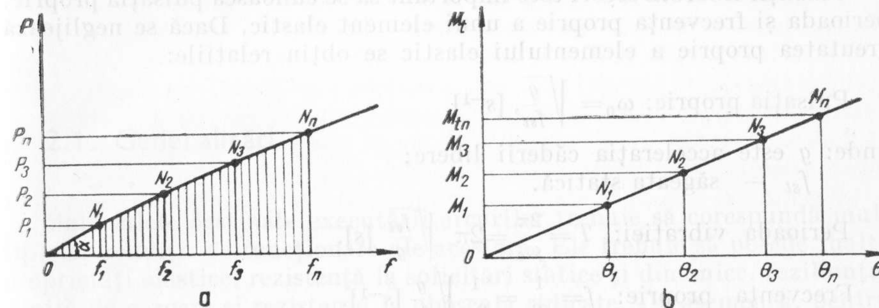



Fig. 1.2

Luarea în considerare a coeficientului de utilizare volumetrică pentru stabilirea formei celei mai indicate este obligatorie la proiectarea unui element elastic.

Uneori se fac aprecieri privind lucrul mecanic acumulat pe unitatea de volum. În acest scop se folosesc relațiile:

$$W_0 = \frac{W}{V} = \eta \frac{\sigma^2}{E} \text{ sau } W_0 = \frac{W}{V} = \eta \frac{\tau^2}{G}.$$

Raportînd la greutatea arcului se obține:

$$W_q = \frac{W}{Q} = \frac{W_0}{\gamma},$$

unde $Q$ este greutatea elementului elastic, iar $\gamma$ greutatea specifică a materialului.

Pentru a se lua în considerare prevederile necesare în exploatarea elementelor elastice se foloseşte relaţia: $\eta_0 = \frac{L_u}{L_c}$, unde $L_u$ este lucrul mecanic util, iar $L_c$ lucrul mecanic consumat.

## 1.4. Vibraţiile elementelor elastice

Problema vibraţiilor elementelor elastice, inclusiv a arcurilor, nu este cuprinsă în această lucrare. Totuşi, pentru rezolvarea unor probleme mai simple, se dau unele relaţii de bază pentru calculul vibraţiilor.

**Vibraţii libere.** Deseori este important să se cunoască pulsaţia proprie, perioada şi frecvenţa proprie a unui element elastic. Dacă se neglijează greutatea proprie a elementului elastic se obţin relaţiile:

Pulsaţia proprie: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{f_{st}}}$, $[s^{-1}]$

unde: $g$ este acceleraţia căderii libere;
$f_{st}$ — săgeata statică.

Perioada vibraţiei: $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{f_{st}}{g}}$ $[s]$.

Frecvenţa proprie: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{f_{st}}}$ $[s^{-1}]$.

**Vibraţii forţate.** În cazul unei sarcini oscilatorii, care are o pulsaţie $\omega$, vibraţiile forţate se caracterizează prin factorul de amplificare

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}},$$

care înmulţeşte amplitudinea pe care ar produce-o sarcina aplicată static.

Factorul de amplificare este infinit cînd apare fenomenul de rezonanţă, adică $\omega = \omega_0$, ceea ce duce la ruperea elementului elastic. Principala concluzie care se desprinde este că fenomenul de rezonanţă şi cîmpul din apropierea sa trebuie evitate. Atunci însă cînd condiţiile impun ca $\omega_0 > \omega$, este necesar ca trecerea prin $\omega = \omega_0$ să se facă foarte rapid, pentru a evita ruperea sau deteriorarea elementului elastic.

În capitolele care urmează se dau la diferite tipuri de elemente elastice unele indicaţii referitoare la vibraţii, fără ca acest lucru să însemne că problema vibraţiilor a fost propusă şi tratată în această lucrare.

# 2

# Materiale pentru arcuri

## 2.1. Generalităţi

Materialele destinate executării arcurilor trebuie să corespundă multiplelor condiţii de funcţionare ale acestora. Ele trebuie să posede înalte proprietăţi elastice, rezistenţă la solicitări statice şi dinamice, rezilienţă, limită de curgere şi rezistenţă la oboseală ridicate. De asemenea, pentru anumite condiţii de exploatare se mai impune: rezistenţă la temperaturi ridicate şi la coroziune, dilatare termică redusă, precum şi o stabilitate cît mai ridicată a proprietăţilor elastice.

Alegerea materialului, cît şi a procesului tehnologic pentru un caz dat trebuie să se facă cu luarea în considerare a tuturor factorilor care caracterizează regimul de funcţionare a arcului, comportarea materialului şi eventuala modificare în timp a unor caracteristici ale acestuia.

La alegerea materialului trebuie să se ţină seama că:

— modulul de elasticitate variază cu timpul şi temperatura;

— poziţia de zero a arcului şi sarcina se schimbă cu timpul;

— caracteristica arcului în procesul de acumulare a energiei este întotdeauna deasupra caracteristicii sale la redarea energiei (efect histerezis);

— proprietatea elastică a elementului elastic se manifestă în unele cazuri nu imediat, ci după un timp oarecare; acest efect este evident mai ales la arcurile de cauciuc, la care, după comprimare şi încetarea acţiunii forţei, este necesar un timp de cîteva minute pentru ca să revină

la forma inițială, dar el se întîlnește și la arcurile metalice (acțiune elastică întîrziată).

Caracteristicile unui arc depind de:
— calitatea materialului din care este executat;
— procesul tehnologic de execuție a semifabricatului;
— procesul tehnologic de execuție a arcului.

Arcurile se execută din trei categorii de materiale: metale feroase, metale neferoase și materiale nemetalice.

## 2.2. Metale feroase

În această categorie intră oțelurile carbon de calitate și oțelurile aliate. Caracteristicile impuse arcului determină atît alegerea unei anumite compoziții chimice, cît și a unei anumite stări de livrare a oțelului respectiv. Un oțel laminat la cald nu poate fi folosit, de exemplu, pentru arcuri de mare precizie, deoarece cu toleranțele relativ mari cu care se livrează un asemenea oțel, nu se poate asigura obținerea unei săgeți (deformații) corespunzătoare.

Săgeata are o mare importanță în modul de lucru și comportarea unui arc. Ea depinde de dimensiunile și forma geometrică a barelor din care se execută arcul respectiv, astfel că dacă se urmărește obținerea unei săgeți cît mai apropiată de cea teoretică, trebuie ca toleranțele admise la dimensiunile barelor să fie cît mai mici. Operația de tragere sau laminare la rece care asigură astfel de toleranțe ridică însă prețul de cost al materialului.

La alegerea materialului, proiectantul trebuie să îmbine considerațiile de ordin tehnic cu cele de ordin economic, să utilizeze la maxim calitățile oțelurilor de la cele mai ieftine, utilizabile în condițiile date și să aibă în vedere toți factorii care concură la obținerea unor arcuri corespunzătoare destinației; îndeosebi să țină seama de proprietățile tehnologice ale materialului în ceea ce privește posibilitatea de execuție a arcului, de importanța secțiunilor și parametrilor lor dimensionali, de posibilitatea de ridicare a indicilor calitativi ai materialului prin tratament termic sau mecanic.

Alegerea judicioasă a unui oțel de arc care să țină seama de toți factorii indicați mai înainte impune, în primul rînd, cunoașterea compoziției chimice a oțelului și a influenței elementelor de aliere.

**Oțel carbon pentru arcuri.** Oțelurile nealiate cu un conținut de 0,4—1,25% C se folosesc pentru arcuri ca semifabricat laminat la cald sau tras. Este un oțel ieftin și în cazul unui tratament termic adecvat poate chiar să înlocuiască unele oțeluri aliate. Oțelurile carbon prezintă însă tendință mare de decarburare, și aceasta cu atît mai mult cu cît conținutul în carbon și siliciu este mai ridicat. Decarburarea duce la micșorarea rezistenței la oboseală. Călibilitatea scăzută a acestor oțeluri impune anumite limite pentru grosimea semifabricatelor:
— semifabricatele rotunde să nu depășească diametrul de 15—18 mm;
— semifabricatele dreptunghiulare să nu depășească grosimea de 12—15 mm;

Temperatura de regim cea mai ridicată pentru oțelurile solicitate permanent nu trebuie să depășească 180°C. La temperaturi joase sub 0°C reziliența scade sensibil; temperatura critică de fragilitate fiind circa —100°C.

Arcurile din oțel carbon se caracterizează printr-o rezistență la oboseală foarte ridicată — în această privință nu sînt întrecute decît de arcurile fabricate din oțel aliat cu crom și vanadiu. Fiind ieftine se utilizează pe scară largă.

**Oțel aliat cu siliciu pentru arcuri.** Conținutul în carbon al acestor oțeluri variază între 0,35 și 1%, iar conținutul în siliciu între 1 și 3%. Față de oțelurile carbon, ele au o limită de elasticitate și de curgere mai ridicate și o rezistență la rupere mai mare. Siliciul influențează favorabil reziliența și tenacitatea. Rezistența la șocuri repetate crește cu conținutul în siliciu, devenind foarte importantă la un conținut mai mare de 2%Si. La încălzirea pentru prelucrarea la cald, mai ales cînd aceasta este de lungă durată și la temperaturi înalte, oțelul respectiv înclină spre decarburare, grafitizare (separarea carbonului liber) și supraîncălzire (creșterea grăuntelui oțelului, materialul devenind fragil). Cu creșterea conținutului în siliciu peste 2%, această deficiență se accentuează. Față de oțelurile cu mangan, acestea nu sînt expuse pericolului fisurării în timpul călirii și nu sînt sensibile la fragilitatea de revenire. Gradul de călibilitate (adîncimea zonei călite) permite executarea arcurilor din semifabricate de grosimi pînă la 20 mm. În comparație cu alte oțeluri pentru arcuri, oțelurile aliate cu siliciu au structură pronunțat fibroasă, care, în cazul arcurilor, este avantajoasă, împiedicînd apariția crăpăturilor. Ca urmare a acestei structuri, epruvetele tăiate transversal vor prezenta o reziliență scăzută.

La temperaturi ridicate, arcurile din oțel aliat cu siliciu au aceeași comportare ca și arcurile din oțel carbon. La temperaturi sub 0°C, în funcție de conținutul în siliciu, oțelul devine fragil. În tabela 2.1 sînt indicate temperaturile la care apare pericolul de fragilitate.

Rezistența la rupere a oțelului aliat cu siliciu în stare laminată la cald este de 80—95 kgf/mm², iar după călire și revenire, 90—160 kgf/mm².

*Tabela 2.1*

**Temperaturile la care apare pericolul de fragilitate la oțelul cu siliciu**

| Conținutul în siliciu, % | Temperatura la care apare fragilitatea, °C |
|---|---|
| 2 | −100 |
| 3 | − 50 |
| 4 | + 40 |

Pentru arcurile de supape, limita superioară de utilizare după călire și revenire este de 200 kgf/mm².

Oțelurile aliate cu siliciu sînt cele mai puțin deficitare, rezistă la solicitări mari și la șocuri repetate.

**Oțel aliat cu mangan pentru arcuri.** Acest oțel conține 0,45−0,8%C și 0,66−2% Mn. Manganul mărește călibilitatea oțelului, fapt care permite semifabricatelor respective să aibă o grosime pînă la 25 mm. De asemenea, datorită manganului, oțelurile respective suferă o decarburare superficială redusă. Alierea cu mangan mai are ca scop ridicarea rezistenței la rupere, simultan însă reziliența și tenacitatea oțelului scad. După terminarea prelucrării la cald, suprafața semifabricatului din oțel cu mangan este foarte netedă. Aceste oțeluri prezintă dezavantajul că sînt sensibile la supraîncălzire; ca urmare, temperatura de încălzire în vederea executării arcului sau în vederea tratamentului termic, precum și durata menținerii la temperatură ridicată trebuie să corespundă dimensiunii și formei semifabricatului sau arcului. Datorită conductibilității termice reduse, aceste oțeluri tind să formeze stări de tensiune interioară, deci trebuie încălzite și răcite cu atenție, și aceasta cu atît mai mult cu cît profilul semifabricatului este mai dificil. Alt neajuns important al acestor oțeluri pentru arcuri este fragilitatea la revenire.

La temperatură ridicată, arcurile din oțel mangan se comportă ca și arcurile din oțel carbon.

Rezistența la rupere în stare laminată la cald este de 80−90 kgf/mm²; limitele obișnuite de utilizare, după călire și revenire, 90−150 kgf/mm²; limita superioară de utilizare (la oțelul cu 0,8%C)−180 kgf/mm².

Acest oțel se folosește la fabricarea tuturor tipurilor de arcuri, dar în special a arcurilor în foi și a celor elicoidale pentru autovehicule și material rulant.

**Oțel aliat cu mangan și siliciu pentru arcuri.** Astfel de oțeluri conțin 0,8−1,5%Mn și 1−1,5% Si (chiar mai mult în anumite cazuri). Cele două elemente de aliere ridică gradul de călibilitate, reduce gradul de decarburare și îmbunătățește caracteristicile mecanice. Introducerea manganului micșorează pericolul de separare a carbonului liber, neajuns pe care-l prezintă oțelurile aliate numai cu siliciu. Prezența siliciului micșorează sensibilitatea la supraîncălzire provocată de mangan și mărește stabilitatea la revenire.



Folosirea oțelului aliat cu siliciu și mangan la arcuri permite mărirea grosimii semifabricatelor pînă la 25 mm. Se utilizează la fabricarea diferitelor tipuri de arcuri greu solicitate pentru vehicule de mare viteză, arcuri care se comportă bine la șoc.

**Oțel aliat cu nichel și siliciu pentru arcuri.** Aceste oțeluri conțin 0,8−4,5% Ni și 1−2% Si.

Adaosul nichelului are drept scop mărirea călibilității. Într-o mică măsură se mărește și rezistența și tenacitatea oțelului. Adaosul de nichel în oțelurile cu siliciu împiedică separarea grafitului și decarburarea stratului superficial.

**Oțel aliat cu crom pentru arcuri.** Conținutul în crom variază între 1−1,5%.

Fără a scădea reziliența oțelului, cromul oferă oțelului o rezistență mai mare decît siliciul și manganul. Cu creșterea conținutului în crom peste 1,5%, reziliența oțelului începe să scadă.

Printre avantajele pe care le prezintă oțelurile aliate cu crom pentru arcuri sînt următoarele: grad de călibilitate ridicat, susceptibilitate redusă la decarburare și supraîncălzire; deformație redusă sub influența tensiunilor interne cu ocazia tratamentului termic. Prezintă însă dezavantajul de a fi susceptibil la fragilitatea de revenire.

Temperatura de regim a arcurilor din oțel aliat cu crom ajunge pînă la 320°C.

Oțelurile aliate cu crom se utilizează la arcuri solicitate intens. Utilizarea lor nu este suficient de frecventă din cauza fragilității de revenire. Cromul, ca adaos la alte elemente de aliere, constituie un material de bază pentru arcuri.

**Oțel aliat cu crom și siliciu pentru arcuri.** Aceste oțeluri conțin 0,35−0,60% C, 0,70−2% Si și 0,70−1,30%Cr.

Oțelurile cu crom și siliciu au proprietăți mecanice înalte și o oarecare sensibilitate la supraîncălzire. Adaosul de siliciu înlătură fragilitatea de revenire provocată de prezența cromului, iar acesta împiedică separarea grafitului, defect caracteristic oțelurilor cu siliciu. Călibilitatea oțelurilor aliate cu crom și siliciu nu este însă suficient de bună; în scopul ameliorării acesteia se adaugă 0,8...1,2% Mn, denumirea oțelului în acest caz fiind oțel crom-siliciu-mangan.

Proprietățile elastice ale arcurilor respective nu dispar dacă temperatura de regim nu depășește 350°C.

Arcurile din oțel cu crom și siliciu se folosesc pe scară largă datorită rezistenței lor la temperatură, la oxidare și datorită caracteristicilor lor mecanice înalte.

**Oţel aliat cu crom şi mangan pentru arcuri.** Aceste oţeluri conţin 0,40...0,65% C; 0,90...1,50% Cr; 0,70...1,20% Mn.

De alegerea corectă a raportului între crom şi mangan depinde obţinerea valorilor maxime ale proprietăţilor oţelului respectiv. Un conţinut mai mare în mangan micşorează brusc rezilienţa arcului, mai ales după călirea şi revenirea acestuia.

Manganul fiind elementul hotărîtor în privinţa călibilităţii, asociat cu cromul face posibilă călirea semifabricatelor de arcuri cu grosimi de 25–30 mm.

Oţelul aliat cu crom şi mangan manifestă, într-o măsură mai mică decît oţelul mangan, sensibilitate la fragilitatea de revenire, totuşi şi în acest caz trebuie luate măsuri pentru prevenirea ei. La călirea în ulei, arcurile suferă deformaţii reduse. Cromul micşorează sensibilitatea la supraîncălzire, defect dat de mangan; totuşi, temperaturile în timpul prelucrării la cald nu trebuie să depăşească pe cele prescrise. Atît manganul, cît şi cromul, spre deosebire de carbon şi siliciu, măresc modulul de elasticitate transversal, *G*. În oţelurile aliate cu crom şi mangan, modulul de elasticitate transversal ajunge la valori de circa 8 000 kgf/mm². Cu mărirea temperaturii, valoarea lui scade considerabil. În fig. 2.1 sînt date curbele de variaţie a modulului de elasticitate transversal cu temperatura pentru diferite materiale.

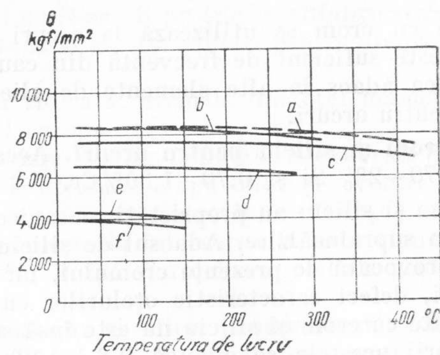



Fig. 2.1

Curba *a* este trasată pentru oţelul R4 STAS 893-54 (fost coardă de pian), oţel carbon călit în ulei, oţel carbon tras la rece; curba *b* pentru oţel aliat cu crom şi vanadiu prelucrat la cald şi pentru oţel aliat cu wolfram; curba *c* pentru oţel inoxidabil tras la rece; curba *d* pentru metal-monell; curba *e* pentru bronz cu beriliu; curba *f* pentru alamă specială. Diagramele au fost trasate pentru epruvete cu diametrul de 2,5 mm.



Ca şi oţelurile aliate cu mangan, aceste oţeluri nu sînt indicate la execuţia arcurilor supuse la şocuri repetate.

Temperatura de regim a arcurilor solicitate permanent şi intens nu trebuie să depăşească 300°C.

Arcurile din oţel aliat cu crom şi mangan tind să înlocuiască pe cele cu crom şi siliciu, care sînt mai scumpe şi care au aproximativ aceeaşi comportare la temperatură şi aceeaşi rezistenţă la oxidare.

Oţelul de arc aliat cu crom şi mangan are o bună rezistenţă la oboseală, fapt care îl face utilizabil la arcurile cu destinaţii importante, care funcţionează la eforturi alternative.

Oţelul aliat cu crom şi mangan se foloseşte la fabricarea arcurilor elicoidale groase, călibilitatea fiind asigurată pînă la dimensiunile limită ale acestor arcuri, de asemenea şi la alte tipuri de arcuri solicitate intens: arcuri pentru locomotive, vagoane, autovehicule de mare viteză. Dezavantajul lor constă în fragilitate la revenire.

**Oţel aliat cu crom-siliciu şi mangan pentru arcuri.** Conţinutul atît în mangan, cît şi în siliciu este de circa 1%, iar în crom de 0,4–0,8%.

Cromul în proporţie de numai 0,4% este suficient pentru a împiedica efectele supraîncălzirii, decarburarea stratului superficial şi separarea grafitului. Pentru reducerea tendinţei de creştere a grăuntelui oţelului la încălzire, adică a sensibilităţii la supraîncălzire, se adaugă de obicei 0,15–0,40% molibden, element care influenţează pozitiv şi călibilitatea.

Temperatura de regim a arcurilor solicitate permanent şi intens nu trebuie să depăşească 300°C.

Arcurile din oţel aliat cu crom, siliciu şi mangan au rezistenţă mare, elasticitate bună, rezistenţă la oboseală şi nu prezintă tendinţă de fragilitate la revenire. Din acest material se execută mai ales arcuri inelare şi arcuri de torsiune.

**Oţel aliat cu crom şi vanadiu pentru arcuri.** Conţinutul în crom este de 1%, iar în vanadiu de 0,1–0,25%.

Adaosul de vanadiu măreşte rezistenţa la oboseală a oţelului respectiv. Rezistenţa la oboseală a oţelurilor pentru arcuri depinde în mai mare măsură de starea suprafeţei decît de compoziţia chimică; totuşi şi aceasta are o oarecare influenţă.

Datorită însuşirii vanadiului de a forma carburi şi de a contribui la purificarea înaltă a oţelului, oţelurile respective nu sînt sensibile la supraîncălzire, iar după călire şi revenire prezintă o structură cu

grăunte fin, rezistentă la rupere prin acționări bruște. Vanadiul ridică punctele de transformare ale oțelului, permițînd deci reveniri la temperaturi înalte. Revenirea la temperatura de 600°C, la care este supus oțelul aliat cu crom și vanadiu, permite evitarea domeniului de fragilitate ireversibilă, precum și eliminarea într-un grad înalt a tensiunilor interne, și deci a deformațiilor. Arcurile fabricate din acest oțel își păstrează proprietățile elastice pînă la o temperatură de 400°C.

Oțelul aliat cu crom și vanadiu dă arcurilor o rezistență la oboseală deosebit de mare; ca urmare se folosește la fabricarea arcurilor supuse la eforturi alternative. Sîrma trasă din acest oțel poate fi executată cu un diametru de pînă la 10 mm. Arcurile din oțel aliat cu crom și vanadiu se remarcă prin proprietăți elastice ridicate, rezistență dinamică și statică mare, prezentînd o mare siguranță în funcționare. De asemenea, aceste arcuri se folosesc la dispozitive de mare precizie, putîndu-se impune condiții stricte în ceea ce privește deformarea. Folosirea lor curentă este limitată de prețul lor foarte ridicat.

**Oțel aliat cu crom, siliciu și vanadiu pentru arcuri.** Conținutul în crom este de circa 1%, în siliciu de 1–2%, iar în vanadiu 0,1–0,2%.

Cu creșterea conținutului în siliciu, capacitatea oțelurilor aliate cu crom și vanadiu pentru arcuri de a opune rezistență la șocuri repetate crește și mai mult. Față de oțelurile aliate cu crom și vanadiu, oțelurile acestea prezintă o rezistență la oboseală mai mică.

Arcurile din oțel aliat cu crom, siliciu și vanadiu își păstrează proprietățile elastice pînă la temperaturi de 320°C. La temperaturi sub 0°C, fragilitatea oțelului dată de prezența siliciului este întrucîtva ameliorată de către crom și vanadiu (v. oțelul aliat cu siliciu pentru arcuri).

Arcurile din oțel aliat cu crom-siliciu și vanadiu pot fi intens solicitate, pot lucra la temperaturi ridicate sub sarcini bruște; de asemenea pot fi solicitate la sarcini repetate.

**Oțeluri aliate cu molibden, wolfram și vanadiu.** Molibdenul, wolframul și vanadiul se folosesc numai ca adaosuri pe lîngă alte elemente de aliere, avînd o influență favorabilă asupra proprietăților oțelului.

Molibdenul micșorează sensibilitatea oțelului la revenire. Influența wolframului este egală cu a molibdenului numai dacă adaosul de wolfram este dublu față de cel de molibden. Vanadiul nu micșorează sensibil fragilitatea de revenire.

Vanadiul dă oțelului o mare rezistență la oboseală; wolframul influențează mai puțin în acest sens, iar molibdenul nu îmbunătățește de loc această caracteristică a oțelului.

Wolframul și vanadiul influențează favorabil în special tenacitatea.



Pînă la un conținut de 2%, molibdenul ridică sensibil rezistența la rupere, limita de elasticitate, limita de curgere, conținut după care valorile caracteristicilor mecanice încep să scadă. Un procent de 1–2% Mo se adaugă oțelurilor de arcuri, înalt aliate cu crom, pentru a le mări rezistența la coroziunea acidului clorhidric și a sărurilor acestuia. Arcurile din oțel cu crom și molibden, înalt aliate, mai sînt destinate și funcționării la temperaturi pînă la 450°C. Oțelurile cu adaos de molibden, wolfram și vanadiu permit revenirea la temperaturi ridicate, evitîndu-se prin aceasta posibilitatea de apariție a fisurilor la revenire.

Arcurile cărora li se impun condiții stricte în ce privește deformația se fabrică din oțeluri cu unul din aceste adaosuri, deoarece numai revenirea la temperatură înaltă permite o bună eliminare a tensiunilor interne apărute cu ocazia călirii.

Molibdenul, wolframul și vanadiul se mai introduc în oțeluri pentru a micșora sensibilitatea acestora la supraîncălzire (carburile acestor elemente descompunîndu-se doar la temperaturi de 2000°C, împiedică creșterea grăuntelui oțelului în timpul încălzirii).

**Oțeluri pentru arcuri anticorosive și rezistente la temperaturi înalte.** Atît rezistența la coroziune cît și rezistența la temperaturi înalte presupun formarea unei pelicule protectoare la suprafața materialului, care să împiedice acțiunea în adîncime, distrugerea oțelului la temperaturi ridicate constînd dintr-o coroziune gazoasă, datorită oxigenului sau gazelor de sulf.

Oțelurile anticorosive și rezistente la temperatură ridicată pentru arcuri sînt oțelurile înalt aliate cu crom, care, oxidîndu-se mai repede decît fierul, formează o peliculă protectoare de oxizi.

Deoarece în cazul arcurilor rezistente la temperatură înaltă trebuie ca materialul să prezinte la temperaturi ridicate și anumite proprietăți mecanice, în oțelul respectiv se mai adaugă molibden sau wolfram, elemente care mențin aceste proprietăți la un nivel ridicat chiar la temperatură înaltă. Arcurile executate din aceste oțeluri se împart în două categorii, după structura oțelului care se obține după călire și revenire în aer, și anume: arcuri din oțeluri martensitice; arcuri din oțeluri austenitice.

Oțelurile martensitice sînt magnetice și călibile, și conțin 12–18% Cr. Sînt de asemenea susceptibile la supraîncălzire, iar în cazul unei reveniri în domeniul de temperatură cuprins între 500 și 550°C devin fragile.

Din această categorie de oțeluri face parte oțelul 40 C 130, STAS 3583-64, cu compoziția: 0,35–0,44% C; Mn$\leqslant$0,6%, Si$\leqslant$0,6%; 12–14% Cr. Modulul de elasticitate longitudinal, $E$, al acestui oțel are

valoarea aproximativă 22 000 kgf/mm², iar modulul de elasticitate transversală $G \approx 8\ 700$ kgf/mm².

Oţelurile austenitice prezintă proprietăţi optime la coroziune, cît şi la temperatură ridicată, cum şi la temperaturi sub 0°C. Sînt antimagnetice şi nu devin dure în urma călirii, rezistenţa şi duritatea obţinîndu-se prin laminare la rece sau trefilare. După ecruisare, şi anume la o reducere a secţiunii cu 50%, se poate ajunge la o rezistenţă de rupere de 125 kgf/mm² şi o limită de proporţionalitate de 100 kgf/mm². Din această categorie de oţeluri face parte oţelul 10 TNC 180, STAS 3583-64, cu compoziţia: C⩽0,12%; Mn⩽2%; Si⩽0,8%, 17–19 %Cr; 8–9,5% Ni, 0,7%Ti. Modulul de elasticitate longitudinal $E$ al acestui oţel are valoarea aproximativă de 20 300 kgf/mm², temperatura de călire 1050–1120°C. Se utilizează la executarea membranelor şi burdufurilor şi a altor arcuri care lucrează la temperaturi mari, pînă la 400°C, în medii agresive, ca apa de mare, în soluţii bazice şi în soluţii slab acide. Acest oţel este antimagnetic, se sudează bine, dar se lipeşte greu. Proprietăţile elastice reduse nu permit utilizarea oţelului respectiv la executarea arcurilor pentru aparate de măsură.

Aliajul elinvar (0,7–0,8% C; Si<0,6%; 2–3% Mn; 7–9% Cr; 33–35% Ni, 3,4% W, restul fier) se foloseşte la fabricarea arcurilor cu proprietăţi anticorosive ridicate, însă nu sînt stabile la temperaturi înalte; proprietăţile lui elastice rămîn neschimbate numai pînă la temperatura de 100°C.

Caracteristic la acest material mai este coeficientul de dilatare termică redus. Modulul de elasticitate al acestui aliaj este de 14 500 kgf/mm², rezistenţa la rupere 95–100 kgf/mm².

Durificarea se face numai prin ecruisare în urma prelucrării la rece. Din elinvar se fabrică arcuri pentru instrumente de mare precizie.

În STAS 795-62 sînt prevăzute nouă calităţi de oţeluri destinate fabricării arcurilor de diferite tipuri, utilizate în diverse ramuri ale construcţiilor mecanice.

În cele ce urmează se prezintă principalele calităţi de oţeluri pentru arcuri.

*Oţelul Arc 1* este un oţel aliat cu crom şi vanadiu. Se foloseşte la fabricarea arcurilor pentru armament, arcuri pentru supape, arcuri destinate suspensiei vehiculelor şi autovehiculelor de mare viteză etc. Este oţelul de cea mai bună calitate; folosirea lui pe scară largă este limitată de preţul de cost foarte ridicat.

*Oţelul Arc 2* este un oţel aliat cu crom şi mangan. Se foloseşte la fabricarea arcurilor groase de 25–30 mm de toate tipurile, arcuri pentru vehicule şi autovehicule de viteză mare etc. Are un preţ de cost destul de ridicat.



*Oţelurile Arc 3 şi Arc 9* sînt oţeluri aliate cu mangan şi siliciu. Se folosesc la fabricarea arcurilor cu grosime pînă la 25 mm, arcuri de supape, arcuri pentru vehicule şi autovehicule etc.

*Oţelurile Arc 4 şi Arc 5* sînt cele mai frecvent folosite dintre oţelurile aliate. Au preţ de cost convenabil şi pot fi tratate termic. Se folosesc la fabricarea diferitelor tipuri de arcuri în construcţia de maşini, arcuri pentru supape de manevră, arcuri pentru supape de siguranţă şi de închidere rapidă, arcuri pentru material rulant, arcuri de tampoane, arcuri în foi, arcuri spirale. Oţelul Arc 4 se foloseşte în special la execuţia arcurilor elicoidale cu profil dreptunghiular (volute) şi a arcurilor în foi.

*Oţelurile Arc 6 şi Arc 7* sînt oţeluri carbon. Se folosesc la fabricarea arcurilor de importanţă redusă; totuşi, cînd sînt tratate termic în condiţii optime pot înlocui oţelurile aliate, mai ales cînd se cere o rezistenţă mare la oboseală. Sînt cele mai ieftine oţeluri de arc.

*Oţel Arc 8* este un oţel aliat cu crom-siliciu. Se foloseşte la fabricarea arcurilor intens solicitate, arcuri pentru vehicule şi autovehicule de mare viteză, arcuri de supape, diferite arcuri care lucrează la temperaturi mari, arcuri rezistente la oxidare. Au preţ de cost ridicat.

Modulul de elasticitate longitudinal al oţelurilor cuprinse în STAS 795-62 este, în medie, de $2{,}1 \times 10^4$ kgf/mm², iar cel transversal de $G = 8 \times 10^3$ kgf/mm².

### 2.2.1. Semifabricate standardizate pentru arcuri

Profiluri laminate la cald din oţel, STAS 795-62, sînt: oţelul rotund, oţelul pătrat, oţelul canelat şi oţelul lat.

În ceea ce priveşte livrarea, STAS 795-62 prevede că în mod normal, oţelurile se livrează în stare laminată la cald, cu duritatea Brinell corespunzătoare.

Pe bază de înţelegere, profilurile se pot livra şi în stare recoaptă sau normalizată, cu o duritate stabilită de comun acord. Tot în STAS 795-62 se indică adîncimea maximă a stratului decarburat (zona feritică plus zona de trecere) admisă, în funcţie de calitatea oţelului şi de grosimea laminatului.

Epruvetele pentru încercarea la tracţiune se execută prin aşchiere din probe luate în anumite condiţii, după tipul profilului. Aceste epruvete se supun înainte de încercare tratamentului termic corespunzător

calităţii de oţel din care este laminat profilul, tratament indicat în STAS 795-62.

*Oţel lat pentru arcuri în foi şi arcuri volute*, STAS 3020-59, se laminează în două tipuri: tip I (fig. 2.2, *a*) şi tip II fig. 2.2, *b*).

Standardul respectiv indică dimensiunile, masele, precum şi abaterile limită la dimensiuni. Acest oţel se livrează:

— în lăţimi de la 30—200 mm;

— în grosimi de la 4—12 mm;

— în lungimi de la 2—6 m, admiţîndu-se la 15% din lot, la greutate, să fie format din bucăţi de 1—2 m; afară de cazul cînd în comandă s-a specificat că nu se admit lungimi mai scurte.

Atît în lungul muchiei, cît şi în planul perpendicular pe suprafaţa profilului, benzile de oţel lat sînt deformate, prezintă o anumită curbură. Standardul respectiv indică curburile admise pe metru.

Pentru arcuri destinate autocamioanelor, precum şi pentru arcuri conice, STAS 3020-59 prevede şi laminarea unui oţel lat cu dimensiuni speciale.

*Oţel canelat pentru arcuri în foi.* Dimensiunile, masele şi toleranţele acestui profil sînt prevăzute în STAS 909-62.

Drept material se foloseşte oţelul Arc 4; la înţelegere se pot utiliza şi alte calităţi de oţeluri pentru arcuri, prevăzute în STAS 795-62.

*Oţel în bare profilate pentru arcuri elicoidale.* Arcurile elicoidale se execută din bare de diferite secţiuni: standardizate sînt numai două profiluri: rotund şi pătrat.

Arcurile elicoidale din oţel rotund se execută din bare cu secţiune circulară, ale căror dimensiuni sînt prevăzute în STAS 333-64. În standardul respectiv sînt prescrise diametrele, abaterea limită a diametrelor şi greutatea în funcţie de diametre. Barele sînt laminate la diametre

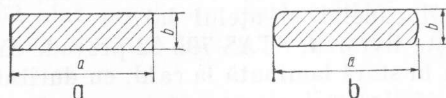



Fig. 2.2

cuprinse între 12 şi 240 mm. În privinţa abaterilor, standardul respectiv menţionează că oţelul rotund se poate livra, la înţelegere, cu abateri numai în plus, în limitele întregului cîmp de toleranţe.

Uzina producătoare, în cazul cînd beneficiarul specifică în comandă, livrează profilurile decrustate. În acest scop profilul laminat la un diametru mai mare, cu aproximativ 2,5 mm, se decrustează la maşini de



rectificat; în orice caz nu se foloseşte în acest scop trefilarea, operaţie în care crusta arsă şi oxidată care acoperă suprafaţa materialului laminat la cald s-ar include în material. De asemenea nu este permisă operaţia de calibrare cu galeţi.

**Oţelul pătrat pentru arcuri elicoidale.** În STAS 334-59 sînt indicate dimensiunile, toleranţele admise şi greutatea în funcţie de dimensiuni a acestor profiluri. Dimensiunile la care sînt laminate barele respective corespund unei variaţii a laturii pătratului de la 8 la 14 mm.

Oţelul pătrat este preferat celui rotund; numărul arcurilor rebutate în aceleaşi condiţii de funcţionare fiind mai scăzut. Barele din oţel pătrat nu se admit cu curburi mai mari de 6 mm/m.

**Oţel trapezoidal laminat la cald pentru inele-resort.** Pentru inelele-resort dimensionate conform STAS 1384-50, se foloseşte oţelul trapezoidal, laminat la cald, STAS 1717-50. Profilul se laminează din oţel Arc 5, STAS 795-62, şi se verifică în conformitate cu acest standard. Duritatea Brinell a semifabricatului în stare de livrare trebuie să fie de maxim 265 kgf/mm².

**Sîrmă trasă.** La alegerea între un profil laminat la cald sau unul laminat la rece trebuie să se ţină seama de toleranţele dimensiunilor şi de eventualele abateri ale săgeţii de la valoarea calculată pe baza diametrului nominal şi anume:

$$\Delta f = -4(\Delta d) + +0{,}2(\Delta d)^2 - 0{,}01(\Delta d)^3,$$

unde: $\Delta f$ este abaterea săgeţii;

$\Delta d$ — abaterea diametrului

Cu creşterea diametrului sîrmei ($\Delta d > 0$), săgeata scade ($\Delta f < 0$) şi invers (fig. 2.3)

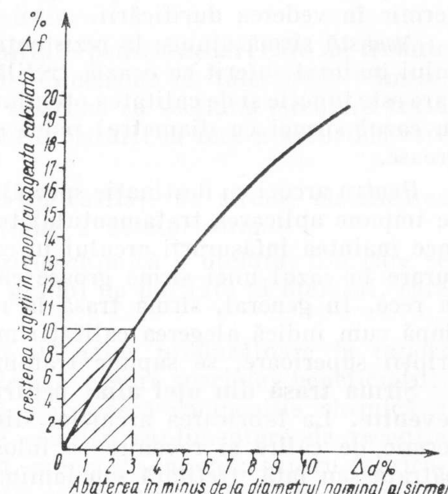



Fig. 2.3

Diagrama din fig. 2.3 arată că atunci cînd $\Delta f$ trebuie menţinut în limite strînse (cazul arcurilor pentru aparate de precizie), trebuie să se recurgă la sîrmă trasă, al cărui cîmp de toleranţe este restrîns; Zona haşurată se referă la oţelul tras, iar cea nehaşurată la oţelul laminat la cald.

Pentru fabricarea arcurilor de importanţă mai mică sau a arcurilor grele, de exemplu arcuri pentru vagoane sau autovehicule, ale căror

toleranţe sînt peste 10%, se poate folosi o sîrmă ale cărei abateri sînt mai mari de 3%, ceea ce corespunde cu sîrma laminată la cald.

Pentru fabricarea arcurilor de precizie, arcuri pentru dinamometre, aparataj electric, supape, ale căror toleranţe de funcţionare sînt de ordinul 4–10%, trebuie să se folosească sîrma trasă, ale cărei abateri la dimensiune sînt de ordinul 1–3%.

Pentru fabricarea arcurilor foarte precise, din sîrmă subţire, ale căror toleranţe de funcţionare sînt de ordinul 1–4%, ar fi necesară o sîrmă cu abateri de circa 0,03 pînă la 0,1%. Aşa, de pildă, pentru o sîrmă de 0,5 mm diametru, abaterile ar trebui să fie de ±0,0017 pînă la ±0,005 mm. Fabricarea unei astfel de sîrme ar fi foarte costisitoare şi n-ar fi justificată decît la o producţie de serie foarte mare. Pentru serii mici sau unicate, se foloseşte sîrma trasă cu abaterile uzuale, din care, prin măsurări, se alege sîrma care corespunde toleranţelor impuse.

Sîrma de oţel cu diametrul de pînă la 12 mm trasă, de asemenea banda de oţel cu grosimea de pînă la 2 mm laminată la rece posedă calităţi adecvate utilizării ei ca arc, nemai necesitînd nici un tratament termic în vederea durificării.

Această sîrmă ajunge la rezistenţa corespunzătoare în urma ecruisajului înaintat suferit cu ocazia trefilărilor finale. Rezistenţa de rupere, care este funcţie şi de calitatea oţelului, ia valori între 170 şi 265 kgf/mm$^2$ în cazul sîrmei cu diametrul redus şi 100–130 kgf/mm$^2$ pentru sîrme groase.

Pentru arcuri cu destinaţie specială, mai ales pentru arcuri de supape se impune aplicarea tratamentului termic de călire şi revenire, care se face înaintea înfăşurării arcului în cazul sîrmei subţiri, sau după înfăşurare în cazul unei sîrme groase care nu permite înfăşurarea arcului la rece. În general, sîrma trasă la rece din oţel aliat fiind destinată, după cum indică alegerea calităţii materialului, pentru arcuri cu prescripţii superioare, se supune tratamentului termic.

**Sîrma trasă din oţel aliat pentru arcuri ce urmează a fi călite şi revenite.** La fabricarea arcurilor din oţel aliat supuse tratamentului termic de călire şi revenire se foloseşte sîrma cu secţiune circulară, pătrată sau lată, trefilată sau laminată la rece, conform STAS 892-60.

Oţelul din care se trag aceste semifabricate este oţelul prevăzut în STAS 795-62 sau un oţel cu o compoziţie chimică corespunzătoare, stabilită pe bază de înţelegere între producător şi beneficiar. STAS 892-60 prevede dimensiunile, toleranţele şi condiţiile de livrare ale acestei sîrme. Conform acestui standard, sîrmele se livrează cu dimensiunile după cum urmează:

— sîrma cu secţiune circulară, cu diametrul cuprins între 3 şi 12,5 mm;



— sîrma cu secţiune pătrată, cu latura de 3–10 mm;

— sîrma lată: lăţimea nominală de 4–10 mm; grosimea nominală de 2–3 mm.

Sîrma se livrează în stare recoaptă şi de calitate uniformă pe toată lungimea ei. Standardul limitează adîncimea stratului decarburat, şi anume:

— pentru arcurile supuse la solicitări mari cu destinaţii speciale, sîrma va fi lipsită de strat decarburat, livrarea făcîndu-se în bare rectificate;

— la sîrmele rotunde şi pătrate, adîncimea stratului decarburat va fi: maximum 0,1 mm pentru sîrmele cu diametru, respectiv lăţimea cuprinsă între 3–6,5 mm inclusiv; maximum 0,2 mm, pentru restul dimensiunilor.

La recepţia materialului trebuie avute în vedere anumite condiţii de stare a suprafeţei sîrmei, şi anume: suprafaţa sîrmei trebuie să aibă un aspect uniform, fără dungi, aşchii, crăpături, scobituri, pelicule, îngroşări, pete de rugină şi alte defecte.

**Sîrma trasă din oţel carbon de calitate pentru arcuri care nu trebuie tratate termic.** STAS 893-54 prevede dimensiunile, toleranţele admise, condiţiile de livrare şi recepţionare a sîrmei cu secţiune circulară trasă din oţel carbon de calitate, destinată fabricării la rece a arcurilor care nu trebuie tratate termic.

Standardul respectiv prevede patru calităţi de sîrmă, clasificarea făcîndu-se după rezistenţa la tracţiune a acestor sîrme.

În standard nu se indică compoziţia chimică a oţelului din care se trag aceste sîrme; este prescris însă gradul de puritate al oţelului, care trebuie să fie cît mai înalt.

Compoziţia chimică se stabileşte de uzina producătoare în raport cu dimensiunile şi marca sîrmei. Pentru cazuri speciale, beneficiarul, de acord cu producătorul, poate să stabilească compoziţia chimică a oţelului. STAS 893-54 mai prevede condiţii suplimentare de recepţie pentru sîrmele cu destinaţie specială, arcuri de supapă; pentru fabricarea şi livrarea acestor sîrme, destinaţia lor trebuie indicată în comandă.

Mărcile de sîrmă R2 şi R3, destinate arcurilor de supape, vor satisface şi condiţii metalografice pentru structură, decarburare şi eventual mărimea grăuntelui.

Procesul tehnologic de fabricaţie al oricărei calităţi de sîrmă trasă trebuie să conţină cel puţin un tratament termic; recoacere, normalizare sau patentare.

Sîrma obţinută prin patentare, numită şi sîrmă coardă de pian, este sîrma care între trefilări este supusă la operaţia de patentare. Ea prezintă caracteristici mecanice mai bune şi toleranţe la diametru mult mai mici decît sîrma care, în vederea trefilării, este supusă operaţiei de recoacere sau normalizare. De asemenea, sîrma patentată prezintă o uniformitate dimensională şi o suprafaţă netedă, fără defecte.

Operaţiile de recoacere, normalizare sau patentare au drept scop distrugerea ecruisajului produs de trefilările anterioare, şi prin aceasta aducerea materialului în stare de a mai putea suporta trefilări în continuare. Aceste operaţii duc la micşorarea fragilităţii şi rigidităţii, şi deci la îmbunătăţirea plasticităţii sîrmei.

În urma operaţiei de patentare, care constă din încălzirea sîrmei la o temperatură cuprinsă între 850 şi 1000°C şi apoi răcirea ei într-o baie de plumb topit la temperatura de 480–510°C, se obţine o structură sorbitică, rezultată din descompunerea izotermică a austenitei, cu o rezistenţă la rupere de 80–100 kgf/mm². Această structură permite un număr mare de trefilări aşa, încît în urma unui ecruisaj puternic se poate ajunge în final la o rezistenţă de rupere de 180–280 kgf/mm², adică la rezistenţa corespunzătoare mărcii R4 (coardă de pian). Sîrma îşi păstrează în acelaşi timp o plasticitate suficientă, necesară prelucrărilor mecanice ulterioare.

Oţelul carbon destinat sîrmei R4 este caracterizat nu numai printr-un grad mare de puritate, ci şi printr-un conţinut ridicat în carbon. caracteristicile mecanice înalte ale acestei sîrme obţinîndu-se prin combinarea efectului produs de conţinutul ridicat în carbon şi de gradul înalt de ecruisaj.

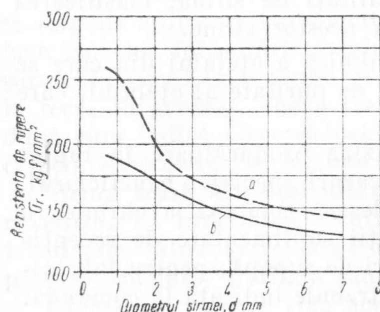


Fig. 2.4

Compoziţia chimică a oţelului pentru sîrma R4 poate fi următoarea: C 0,94%; Mn 0,38%, Si 0,16%, Cr 0,5%, P 0,030%, S 0,02%, Cu 0,2%.

În fig. 2.4 se dă comparativ variaţia rezistenţei sîrmei obţinută prin procedeul de patentare (curba *a*) şi a sîrmei călite şi revenite (curba *b*) în funcţie de diametrul sîrmei; se vede că diferenţa este mai accentuată la diametre mici. În ce priveşte rezistenţa la oboseală, sîrma R4 nu ajunge la valorile date de către sîrma călită şi revenită. De aceea ea nu este potrivită pentru fabricarea arcurilor de supapă, adică la solicitări variabile.



Sîrma R4 se foloseşte în mod deosebit la fabricarea arcurilor spirale ale mecanismelor de precizie cum sînt maşinile de scris, de calcul, armele automate şi altele.

Arcurile executate din sîrmă trasă (prin recoacere, normalizare sau patentare) nu sînt supuse de regulă unui tratament termic suplimentar, cu excepţia unei încălziri reduse, în scopul eliminării tensiunilor remanente.

### 2. 2. 2. Consideraţii asupra tratamentului termic aplicat arcurilor din oţel

Imprimarea proprietăţilor corespunzătoare unui oţel de arcuri se face fie prin tratament termic de călire-revenire, fie prin deformări plastice la rece (ecruisare).

Arcurile executate din semifabricatele durificate prin ecruisare se supun şi ele unui tratament termic, şi anume unei recoaceri de detensionare, care constă din încălzirea la 230 pînă la 400°C, urmată de răcire în aer. Acest tratament termic are drept scop eliminarea tensiunilor remanente, apărute cu ocazia operaţiilor executate la rece: deformarea plastică a semifabricatului şi înfăşurarea arcului. Pentru sîrma obţinută prin patentare, limitele de recoacere pentru detensionare sînt mai strînse. În fig. 2.5. se indică variaţia rezistenţei la rupere $\sigma_r$ şi a limitei de elasticitate $\sigma_e$, a acestei sîrme în funcţie de temperatura de recoacere. Valorile maxime pentru $\sigma_r$ şi $\sigma_e$ se obţin prin recoacere în jurul temperaturii de 200°C.

Tratamentul termic de călire-revenire se aplică semifabricatelor din oţeluri aliate, iar în anumite cazuri şi semifabricatelor din oţel carbon, folosite la arcuri cu destinaţie specială. Acest tratament se aplică arcurilor gata executate, iar în unele cazuri şi semifabricatelor folosite la executarea arcurilor prin înfăşurare exclusiv la rece.

Tratamentul termic de călire-revenire este influenţat foarte mult de dimensiunile relativ reduse ale arcurilor. Aici mai mult decît în alte cazuri, o călire prost aplicată duce la fragilitate, duritate neuniformă, deformaţii şi fisuri. Operaţia de călire-revenire trebuie condusă astfel încît să se obţină o structură care să dea arcului o rezistenţă suficientă şi în acelaşi timp tenacitate şi limită elastică superioară. În urma călirii, în toată secţiunea materialului se urmăreşte obţinerea unei structuri martensitice.

Reuşita procesului depinde de următorii factori:

Compoziţia chimică a oţelului, care trebuie să corespundă, din punctul de vedere al călibilităţii (adîncimea stratului călit), dimensiunii rezultate prin calcul pentru arcul respectiv. În general, toate elementele de aliere, care cu fierul $\gamma$ formează soluţii solide, măresc călibilitatea;

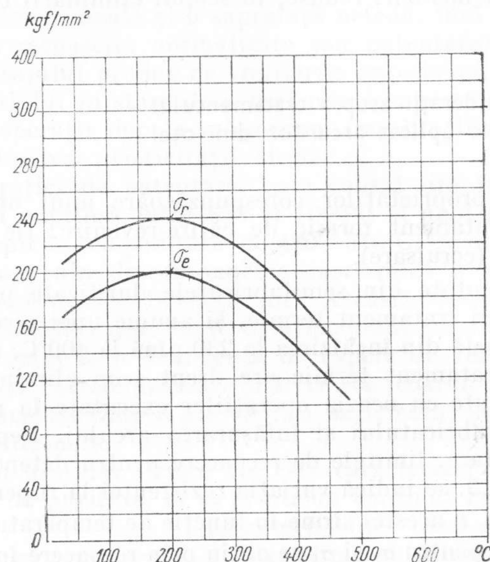



Fig. 2.5

influenţa este totuşi diferenţiată, aşa cum s-a arătat la descrierea diferitelor oţeluri pentru arcuri. Elementele de aliere contribuie, de asemenea, la formarea unei structuri de martensită fină.

Temperatura de călire şi durata de menţinere la această temperatură, care trebuie să asigure completa transformare a perlitei şi feritei în austenită, dar totodată să nu fie depăşite ca să nu se producă o creştere exagerată a grăunţilor de austenită formaţi (supraîncălzire). Temperatura de călire şi durata optimă se stabilesc pentru fiecare oţel şi dimensiune în parte prin încercări prealabile, asociate cu un control metalografic sau de duritate.

Temperatura de călire şi durata sînt influenţate de viteza de încălzire a arcului. Cu cît încălzirea se face mai încet, cu atît temperatura la care are loc transformarea este mai mică, iar durata transformării mai



mare. Dintre elementele obişnuite de aliere ale oţelului pentru arcuri, manganul dă acestuia o sensibilitate ridicată la supraîncălzire, ceea ce impune o respectare riguroasă a temperaturii şi duratei de încălzire, în vederea călirii. Un oţel supraîncălzit duce la o martensită grosolană şi, în final, după revenire, structura obţinută posedă proprietăţi mecanice scăzute, îndeosebi rezilienţa scăzută. O încălzire uniformă a materialului arcului, în condiţiile evitării unei supraîncălziri la suprafaţă, se realizează în băi de sare şi de plumb.

Viteza de răcire are o influenţă hotărîtoare asupra formării martensitei în toată secţiunea materialului arcului. Dacă viteza cu care se răceşte arcul nu este suficient de mare încît să se asigure şi în miezul sîrmei transformarea austenitei în martensită, apar structuri nedorite ca perlita, care provoacă tasarea timpurie a arcului, sau troostita de călire. Troostita de călire, care se obţine la viteze de răcire superioare transformării perlitice, dar inferioare transformării martensitice, prezintă cementita sub formă de lamele, ceea ce face oţelul fragil chiar şi după revenire, întrucît temperatura de revenire nu poate realiza solubilizarea cementitei. Structura obţinută în urma unei căliri în condiţii optime corespunde unei martensite fine, dar cu cît conţinutul în carbon este mai ridicat, cu atît probabilitatea de a găsi o cantitate oarecare de austenită reziduală este mai mare.

Viteza de răcire trebuie să fie mai mare, mai ales în intervalul de temperaturi 600—450°C, cînd austenita prezintă nestabilitatea cea mai accentuată, transformarea ei ducînd în acest caz la troostită de călire. Viteza de răcire trebuie să fie relativ mică în intervalul de temperaturi 300—200°C (în jurul temperaturii de formare a martensitei), pentru a preîntîmpina apariţia tensiunilor termice datorite răcirii. În funcţie de aceste două caracteristici pe care trebuie să le posede un mediu de răcire, se alege de preferinţă drept mediu de răcire uleiul care, în intervalul de temperatură 600—450°C, posedă o viteză de răcire de circa 130°C/s, iar în intervalul de temperatură 200—300°C — de circa 25°C/s.

În cazul oţelurilor carbon, viteza de răcire în intervalul de temperatură 600—450°C trebuie să fie deosebit de mare, aşa încît uleiul nu mai corespunde ca mediu de răcire. În acest caz se foloseşte apa, care prezintă o viteză de răcire de circa 500°C/s pentru intervalul de temperatură 600—450°C şi de circa 260°C/s pentru intervalul 200—300°C.

Viteza de răcire ridicată în jurul punctului martensitic este cauza frecventelor crăpături la care este expus după călire oţelul carbon.

Din această cauză arcurile nu se pot folosi în starea corespunzătoare călirii pentru martensită; ele trebuie supuse unui tratament termic de

revenire prin care se urmărește mărirea tenacității, reducerea durității și reducerea tensiunilor interne. O mare influență asupra acestui proces o au temperatura de revenire și durata menținerii la această temperatură. Modificările care apar la încălzirea unui oțel cu 0,4% C, călit în prealabil pentru martensită, se pot urmări în diagrama din fig. 2.6.

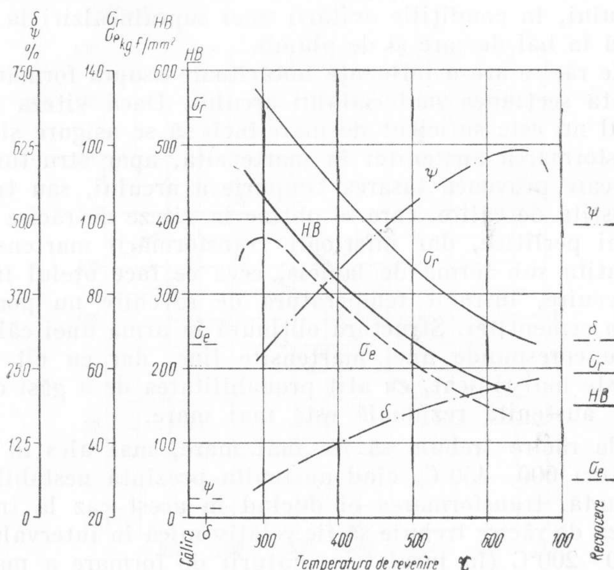



Fig. 2.6

În figură au fost reprezentate curbele de variație în funcție de temperatură ale: alungirii specifice la rupere $\delta$%, gîtuirii specifice $\psi$%, durității Brinell *HB*, limitei de elasticitate $\sigma_e$ și rezistenței de rupere $\sigma_r$. Proprietățile materialului călit sînt indicate în partea stîngă a diagramei, iar valorile corespunzătoare materialului recopt sînt date în partea dreaptă a diagramei.

Curbele arată că pe măsura ridicării temperaturii de revenire, începînd de la 250°C, rezistența oțelului, cu excepția limitei de elasticitate (proporționalitate), scade, iar reziliența crește. Modificarea apreciabilă a proprietăților mecanice începe la temperatura de 400°C, iar la temperaturi de revenire cuprinse între 550—600°C se ajunge la o îmbinare optimă a proprietăților mecanice, caracterizată printr-o rezistență suficientă și o reziliență ridicată. Oțelul supus unei asemenea reveniri înalte prezintă constituentul structural de sorbită globulară.



Arcurilor supuse la sarcini dinamice li se aplică revenirea la temperaturi care duc la obținerea sorbitei globulare; celor cărora li se cere o rezistență și o duritate mai ridicată revenirea se face în jurul temperaturii de 500°C, cînd se obține o structură troosto-sorbitică. Constituentul denumit troostită de revenire se obține prin revenirea oțelului la temperaturi de 300—450°C. Datorită dispersiei fine a cementitei, troostita de revenire este un constituent tenace, spre deosebire de troostita de călire care, din cauza cementitei lamelare, este casantă.

Formarea structurilor de revenire se bazează pe un proces de difuziune a carbonului, proces care este ușurat nu numai de temperatura ridicată, ci și de durata menținerii la această temperatură. Deoarece modificările structurale care intervin în timpul procesului de revenire sînt însoțite și de modificări în volum (diferiții constituenți avînd volume diferite) pentru a se evita apariția de crăpături, încălzirea trebuie să se facă treptat, temperatura cuptorului la introducerea arcului trebuie să fie cu circa 150°C mai mică decît temperatura prescrisă revenirii. Folosirea băilor de revenire asigură o temperatură de încălzire uniformă a arcului și-l ferește de oxidare, necesitînd o întreținere relativ simplă. De reținut că revenirea trebuie aplicată imediat după călire.

La alegerea duratei de revenire la o anumită temperatură, pentru a se evita obținerea de rezultate diferite chiar în cazul aceluiași lot de arcuri tratate termic, trebuie să se aleagă regimul la care proprietățile devin practic stabile. Curba de variație a acestor proprietăți este asimptotică la axa timpului. Pentru temperaturi de revenire care depășesc 300°C, menținerea la temperatura de revenire este între o jumătate de oră și o oră.

Structura oțelului supus revenirii este hotărîtoare în obținerea unei structuri de revenire cu o dispersie fină a cementitei. Influența dăunătoare a grăuntelui de austenită mult crescut cu ocazia supraîncălzirii oțelului în timpul călirii se manifestă după revenire și se resimte mai ales asupra rezilienței arcului. Caracteristicile de reziliență sînt mai puțin influențate. Structura optimă de călire, din care să rezulte o structură optimă de revenire, o constituie martensita fină prezentă în toată secțiunea arcului. S-a arătat că dacă în miezul arcului se obține troostită de călire, aceasta nu suferă nici o modificare în urma încălzirii pentru revenire, arcul respectiv prezentînd o reziliență scăzută.

Viteza de răcire după revenire trebuie să fie redusă pentru a se evita apariția unor noi tensiuni remanente de natură termică. În cazul oțelurilor care prezintă sensibilitate la fragilitate după revenire la tem-

peraturi înalte, şi anume la temperaturi care depăşesc 500°C, răcirea lentă este contraindicată. În diagrama din fig. 2.7 se poate urmări efectul pe care îl are asupra rezilienţei o răcire bruscă, în comparaţie cu una lentă, în cazul unui oţel crom-nichel.

Fenomenul de micşorare a rezilienţei, cînd răcirea de la temperatura de revenire ridicată se face încet, este numit fragilitate de revenire de ordinul doi sau fragilitate de revenire reversibilă.

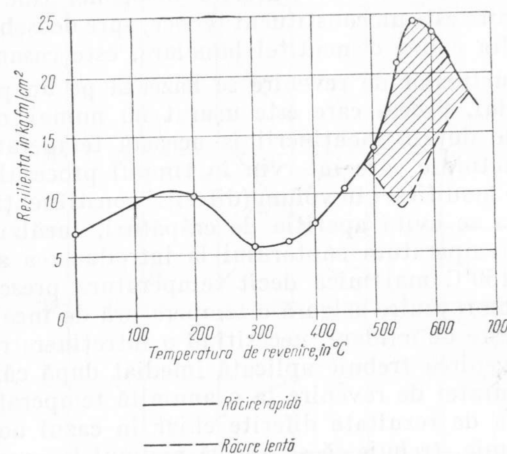



Fig. 2.7

Curba din fig. 2.7 pune în evidenţă existenţa a încă unui domeniu de rezilienţă scăzută, între 300 şi 400°C. Această fragilitate, numită fragilitate de ordinul întîi sau fragilitate de revenire ireversibilă, apare independent de condiţiile de răcire şi poate fi înlăturată numai printr-o revenire la o temperatură mai înaltă. Fragilitate de ordinul întîi prezintă, într-un grad mai mare sau mai mic, toate oţelurile. Fragilitate de revenire de ordinul întîi şi de ordinul doi prezintă oţelurile al căror conţinut în fosfor depăşeşte 0,05–0,06%, adică depăşeşte limita admisă din oţelurile de calitate, precum şi oţelurile cu un procent ridicat de mangan. Cromul dă de asemenea acest neajuns oţelului mai ales cînd conţine nichel şi un procent ridicat de mangan. Molibdenul şi wolframul reduc această sensibilitate a oţelurilor.

Tensiunile termice, care apar cu ocazia răcirii bruşte a oţelurilor care manifestă sensibilitate la fragilitatea de ordinul doi, se pot elimina printr-o recoacere de detensionare la temperatură coborîtă, urmată



de răcire lentă. Este de menţionat faptul că fragilitatea de ordinul doi, care apare, de exemplu, în cazul unei reveniri la 520°C, urmată de răcire lentă, poate fi înlăturată printr-o revenire la 570°C, urmată de răcire rapidă; însă dacă în timpul încălzirii în vederea eliminării tensiunilor interne rezultate prin răcirea bruscă, dintr-o eroare oarecare arcurile ajung iarăşi la temperatura de 520°C, în urma răcirii lente, se obţine din nou rezilienţă scăzută.

Prin călire obişnuită, într-un singur mediu, urmată de revenire, nu se realizează o suficientă eliminare a tensiunilor interne, aşa încît pentru arcurile cu toleranţe de funcţionare strînse se aplică, cu rezultate mai bune, călirea în trepte sau chiar călirea izotermă, care duc la o eliminare mai completă a tensiunilor interne şi la proprietăţi mecanice mai înalte. Călirea întreruptă în cazul arcurilor este dificil de realizat.

*Călirea în trepte* constă în călirea piesei în două medii de răcire; martensita obţinută este transformată ulterior, prin revenire, în sorbită. Practica acestei căliri presupune cunoaşterea temperaturii de început de transformare a austenitei în martensită, temperatură care depinde

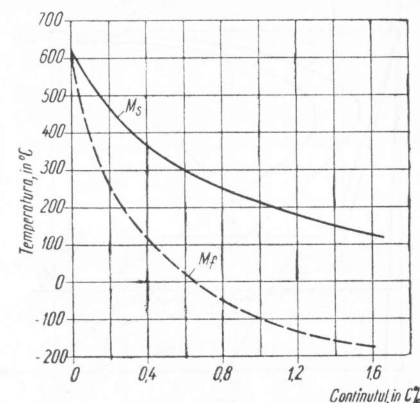



Fig. 2.8

de compoziţia chimică a oţelului respectiv şi îndeosebi de conţinutul în carbon. În fig. 2.8 se dau curbele de început ($M_s$) şi sfîrşit ($M_f$) ale transformării austensitei în martensită în funcţie de conţinutul în carbon.

Arcul încălzit la temperatura prescrisă pentru călire este răcit întîi într-un mediu cald la o temperatură puţin superioară temperaturii de

început de transformare a austenitei în martensită (în jurul temperaturii de 250°C), menținut la această temperatură un timp suficient ca toate punctele arcului să ia temperatura respectivă, apoi răcit din nou cu viteză mică într-un mediu cu temperatura de 40—60°C.

În prima treaptă de răcire, austenita rămîne neschimbată și de-abia în a doua treaptă austenita trece în martensită (are loc călirea propriu-zisă). Schematic, călirea în trepte se poate urmări pe fig. 2.9 (curba 2), comparativ cu călirea obișnuită într-un singur mediu (curba *1*). Este de remarcat faptul că timpul de menținere în prima baie de răcire nu trebuie depășit, ca să nu aibă loc transformarea austenitei; în diagramă, segmentul *ab* nu taie curba de început de transformare a austenitei.

Acest procedeu de călire duce la apariția unor tensiuni interne termice reduse, deoarece răcirea se împarte în două etape; de asemenea, transformările în diferitele puncte ale arcului se produc simultan. Acest

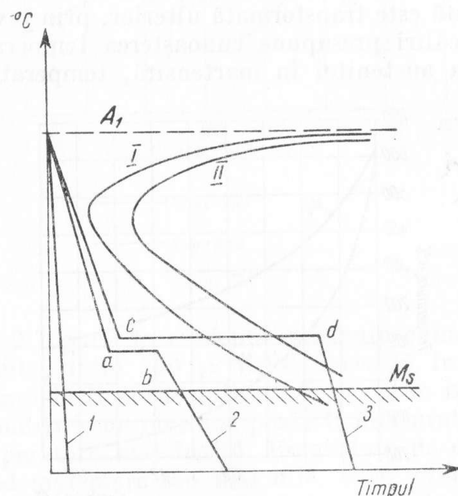



Fig. 2.9

mod de călire este indicat arcurilor de dimensiuni reduse, executate din oțeluri care se călesc în apă (oțeluri carbon și oțeluri slab aliate).

*Călirea izotermă* a arcurilor are drept scop transformarea austenitei la temperatură ridicată în bainită, o structură care dă oțelului caracteristici mecanice superioare, îndeosebi rezistență la oboseală, reziliență ridicată pentru durități de asemenea ridicate. Călirea izotermă constă



din răcirea rapidă a arcurilor într-un mediu cald a cărui temperatură să asigure transformarea austenitei în bainită (fig. 2.9, curba *3*), după care urmează o răcire pînă la temperatura mediului ambiant. Durata de menținere în mediu cald, care nu trebuie să depășească temperatura de 450° — mai ales pentru arcurile din oțel susceptibil la fragilitatea de revenire de ordinul doi — trebuie să fie suficient de mare pentru ca în acest timp să se termine transformarea izotermică a austenitei. În diagramă se vede că segmentul *cd* taie atît curba *I* de început, cît și curba *II* de sfîrșit de transformare a austenitei, așa încît răcirea ulterioară se poate face cu orice viteză, aceasta nemaiavînd nici o influență asupra structurii. O călire izotermă corect condusă în ce privește temperatura și timpul de menținere în baia de călire face inutilă operația de revenire. Transformarea austenitei făcîndu-se la temperatură ridicată, tensiunile interne care apar sînt reduse, așa încît arcurile călite în acest mod nu necesită de obicei nici un tratament termic de recoacere

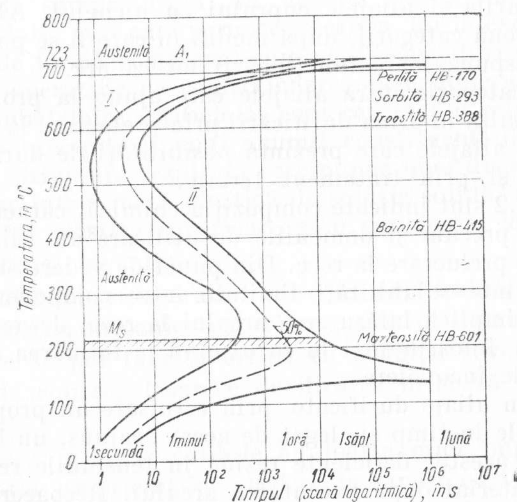



Fig. 2.10

de detensionare. Călirea izotermă se aplică numai oțelurilor aliate, caracterizate printr-o perioadă de incubație mare a austenitei (durată mare de stabilitate a austenitei în oțel la temperaturi mult inferioare punctelor critice). Pentru fiecare oțel în parte trebuie să se cunoască curbele transformării izotermice a austenitei în funcție de care se poate stabili temperatura și durata menținerii în baia de călire. În fig. 2.10

sînt date curbele de transformare izotermică a austenitei în cazul unui oţel eutectoid. Curba *I* indică începutul transformării, curba *II* indică sfîrşitul transformării, iar curba întreruptă indică transformarea austenitei în proporţie de 50%. Pe diagramă mai sînt indicate şi structurile care se obţin în cazul călirii izotermice la diferite temperaturi, cu duritatea Brinell corespunzătoare.

## 2.3. Metale neferoase

### 2.3.1. Caracteristici generale

Anumite arcuri, cărora li se cer anumite proprietăţi speciale, corespunzătoare condiţiilor de exploatare, se execută din metale neferoase. Dintre acestea, o importanţă deosebită prezintă aliajele de cupru: alămurile, bronzurile şi aliajele cuprului cu nichelul. Aliajele de cupru se împart în două categorii, după modul în care li se pot imprima proprietăţile corespunzătoare funcţionării lor ca arc.

În prima categorie intră aliajele care ajung la proprietăţi elastice şi rezistenţă înaltă în urma durificării prin prelucrare la rece (ecruisare), iar în a doua, aliajele care prezintă posibilităţi de durificare atît prin ecruisare, cît şi prin tratament termic.

În tabela 2.2 sînt indicate compoziţia chimică, caracteristicile mecanice şi fizice, precum şi domeniile de utilizare ale aliajelor de cupru durificate prin prelucrare la rece. Din punct de vedere structural, aceste aliaje nu prezintă solubilităţi limitate între componenţi. Durificarea prin ecruisare implică înfăşurarea arcului la rece, de aceea aliajele respective se pot folosi numai în cazul cînd la formarea arcului nu apar sarcini mari de încovoiere.

Arcurile din aliaje durificate prin ecruisare au proprietăţi elastice reduse, instabile în timp şi, legat de acest neajuns, un histerezis foarte ridicat. Cauza acestor deficienţe rezidă în tensiunile remanente considerabile în material după executarea arcului. Recoacerea de detensionare la care sînt supuse arcurile după executare, făcută cu precauţiune ca să nu se distrugă ecruisarea şi deci proprietăţile elastice, nu reuşeşte să elimine complet tensiunile din material. Tensiunile remanente duc nu numai la instabilitatea caracteristicilor arcului în raport cu timpul, dar şi la ruperea arcului după un timp oarecare de funcţionare.

Din gama aliajelor de cupru posibile se folosesc pentru arcuri numai acelea care prezintă în structură constituenţi maleabili care să suporte un grad înalt de ecruisare.



În tabela 2.3 sînt indicate compoziţia chimică, caracteristicile mecanice şi fizice, precum şi domeniile de utilizare ale aliajelor de cupru, care se durifică prin deformări plastice la rece sau prin tratament termic. Arcurile din aliaje de cupru, tratate termic, posedă caracteristici mult mai bune decît arcurile ale căror proprietăţi elastice se datoresc ecruisării.

Prin tratament termic, care constă din călire prin precipitare, se pot durifica unele aliaje de cupru care prezintă în diagramele respective de echilibru limite de solubilitate în stare solidă. Călirea prin precipitare a acestor aliaje constă dintr-o operaţie de punere în soluţie, urmată de o răcire rapidă şi în final de o operaţie de maturizare (îmbătrînire artificială). Operaţia de punere în soluţie constă din încălzirea aliajului peste temperatura de transformare în stare solidă şi din menţinerea un timp suficient la această temperatură, pentru ca un anumit constituent să treacă total în soluţie solidă. Răcirea rapidă care urmează duce la o soluţie solidă suprasaturată. În această stare, materialul prezintă o mare plasticitate, fapt care permite folosirea lui la executarea elementelor elastice de formă complexă, cum ar fi burdufurile şi membranele gofrate. După operaţiile de confecţionare, elementele elastice se supun operaţiei de îmbătrînire artificială, care constă din reîncălzirea aliajului în vederea precipitării unui anumit constituent din soluţia solidă suprasaturată. Structura rezultată corespunde unei dispersii fine a unui constituent dur într-o masă plastică de soluţie solidă, care dă materialului proprietăţi elastice superioare şi o rezistenţă comparabilă cu a oţelurilor călite şi revenite.

Aliajele călibile, comparativ cu cele durificabile prin ecruisare, avînd caracteristici mecanice superioare, sînt utilizate pe o scară mai largă. Din ele se pot fabrica arcuri cu condiţii severe de înfăşurare, fără pericol de rupere, deoarece durificarea urmează după înfăşurarea arcului.

De asemenea, aliajele călibile au foarte mici imperfecţiuni în ce priveşte variaţia proprietăţilor elastice în raport cu timpul, ceea ce se explică prin eliminarea practic completă a tensiunilor remanente în timpul încălzirii pentru maturizare. Aceste arcuri prezintă o durificare mult mai omogenă în volum.

În scopul uşurării alegerii materialului celui mai potrivit unor condiţii de funcţionare date, se vor descrie cîteva aliaje de cupru, aparţinînd celor două categorii, aliaje folosite mai frecvent la fabricarea arcurilor.

*Tabela 2.2*

**Aliaje pe bază de cupru durificate prin prelucrare la rece**

| Materialul | Compoziția chimică, % | Conductivitate electrică la 20°C, raportată la cupru pur, % | Limita de proporționalitate, kgf/mm² | Limita de curgere, kgf/mm² | Rezistența la rupere, kgf/mm² | Modulul de elasticitate $\times 10^3$, kgf/mm² | Modulul de elasticitate transversal $\times 10^3$, kgf/mm² | Duritatea Brinell, kgf/mm² | Alungirea, % | Rezistența la oboseală: Număr de cicluri $\times 10^6$ | Rezistența la oboseală: Rezistența kgf/mm² | Observații |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cupru | Cu 99,9 | 98 | 21,8 | 34,2 | 40 | 11,6 | 3,88 | 110 | 9,8 | 300 | 7,6 | |
| Alamă | Cu 70<br>Zn 30 | 25 | 31 | 54,5 | 68 | 9,5 | 3,25 | 180 | 20 | 300 | 10,1 | Tras sau laminat la rece. Proprietăți anticorosive: rezistența la vapori supraîncălziți și $CO_2$. Nu rezistă la $H_2SO_4$. Conductibilitate electrică bună |
| Alamă cu nichel (Neusilber) | Ni 18 | 6,3 | 35,6 | 54,2 | 70 | 13 | 4 | 190—220 | 20—30 | 100 | 16,1 | Tras sau laminat la rece. Proprietăți anticorosive mai bune decît alama. |
| Bronz fosforos | Cu 94,7<br>Sn 5,3 | 16 | 47 | 66,5 | 74,5 | 10,6 | 3,88—4,5 | 220 | 10—15 | 100 | 15,8 | Tras sau laminat la rece. Arcuri cu proprietăți anticorosive mai bune decît ale arcurilor din alamă: rezistă soluțiilor slab acide, 20% $H_2SO_4$. Limita elastică, rezistența mecanică și rezistența la oboseală ridicate. |
| Bronz fosforos | Cu 93,3<br>Sn 6,7 | 13,4 | 62 | 80,5 | 87,5 | 10,6 | 3,88—4,5 | 240 | 10 | 100 | 12 | |
| Bronz cu conductivitate ridicată | Cu 99<br>Sn 1 | 50—55 | 23,4 | 46,5 | 58,5 | 11,6 | — | 120 | 10—15 | — | — | Tras sau laminat la rece. Arcuri cu conductivitate electrică ridicată. Proprietăți anticorosive. |
| Bronz cu siliciu | Cu 96<br>Si 3<br>Mn 1 | 6,7 | 31 | 62 | 71 | 10 | — | 180 | 20—30 | 100 | 12,5 | Tras sau laminat la rece. Arcuri ieftine, înlocuiesc arcurile din bronz fosforos. |
| Bronz cu cadmiu | Cu 99<br>Cd 1 | 85 | 23,2 | 47 | 59 | 11,6 | — | 120 | 10 | — | — | Tras sau laminat la rece. Arcuri cu conductivitate electrică bună, apropiată de a cuprului, însă cu rezistența mecanică mai mare decît a acestuia. |
| Monel | Ni 60—70<br>Fe 2—3<br>Mn 1,20—1,80<br>Cu restul | 3,7 | 16 | 39 | 71—77,5 | 11,8 | 6,5 | 200—220 | — | 200 | 23 | Tras sau laminat la rece. Arcuri cu rezistență înaltă. Proprietăți anticorosive: rezistă la apă de mare, vapori supraîncălziți, $CO_2$, Cl, soluții slab acide de $H_2SO_4$, substanțe alcaline. |

**Aliaje pe bază de cupru durificate prin prelucrare la rece sau tratamente termice**

| Materialul | Compoziţia chimică, % | Conductivitate electrică raportată la Cu pur, % | Limita de proporţionalitate, kgf/mm² | Limita de curgere, kgf/mm² | Rezistenţa la rupere, kgf/mm² | Modul de elasticitate $\times 10^3$, kgf/mm² | Modul de elasticitate transversal $\times 10^3$, kgf/mm² | Duritatea Brinell, kgf/mm² | Alungirea, % | Rezistenţa la oboseală: Numărul de cicluri $\times 10^6$ | Rezistenţa la oboseală: Rezistenţa, kgf/mm² | Observaţii |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alamă specială | Cu 72; Ni 6; Al 1,5; Zn 20,5 | 15,6 | 40 | 70 | 85 | 11 | 4 | 157 | 20 | 300 | 12,8 | Tratate termic. Arcuri cu proprietăţi anticorosive şi caracteristici mecanice bune |
| Bronz cu crom | Cr 0,6—0,85; Cu 99—99,4 | 80—85 | 23—4 | 46,8 | 55,5 | 12 | 4,5 | 150 | 10 | 300 | 15,8 | Tratate termic. Conductivitate electrică comparabilă cu a cuprului, însă mai rezistent ca acesta |
| Bronz cu aluminiu | Cu 88,9; Al restul | 6,7 | 45 | 70 | 80 | 11,6 | 5 | 200 | 7 | 100 | 16 | Tratate termic. Arcuri cu proprietăţi anticorosive; rezistă mai ales la apa de mare. Sînt ieftine. |
| Bronz cu beriliu | Be 2; Co 0,5; Cu 97,5 | 25—30 | 75 | 100 | 116—140 | 11,6—13 | 4,6—5,5 | 350 | 10 | 300 | 20 | Tratate termic. Arcuri cu proprietăţi anticorosive chiar la temperatura de 150°C. Conductivitate electrică bună |
| Monel K | Ni 66; Cu 29; Al 5 | 28 | 62 | 93—116 | 116—130 | 16,8 | 6 | 330 | — | 20 | 23 | Tratate termic. Idem ca la aliajul Monel, în plus caracteristici mecanice înalte |
| Nichel Z | Ni 98; Cu, Mn, Fe, Si 2 | 4 | 73 | 114 | 140 | 21 | 5 | — | — | — | — | Tratate termic. Păstrează proprietăţile elastice şi mecanice chiar la temperatură ridicată |

### 2.3.2. Alămuri pentru arcuri

Acestea cuprind alămurile industriale şi alămurile speciale, utilizabile la fabricarea arcurilor.

**Alămurile industriale,** utilizate la execuţia arcurilor, conţin 10—37% Zn, restul Cu. Zincul adăugat cuprului măreşte duritatea şi rezistenţa la rupere; adaosul este limitat de faptul că la un conţinut mai mare de 45% Zn, apare un constituent fragil.

Arcuri cu caracteristici bune se obţin din aliaje cu conţinut de zinc cuprins între 30—33%.

În STAS 95-59 sînt prevăzute alămurile laminabile, dintre acestea însă, ca material pentru arcuri nu se pot folosi decît alămurile cu simbolurile Am70 şi Am72.

Plasticitatea mare a alămurilor industriale le face utilizabile la executarea arcurilor de formă complexă. Arcurile respective au proprietăţi anticorosive slabe, dar mai bune decît oţelurile obişnuite de arcuri; sînt stabile în apă dulce, apă de mare, aburi şi $CO_2$.

Arcurile din alamă, deşi ieftine, nu au o utilizare largă, deoarece nu prezintă o siguranţă în funcţionare din cauză variaţiei proprietăţilor elastice cu timpul şi din cauza pericolului de fisurare.

**Alămurile speciale** folosite la executarea arcurilor sînt alămurile cu nichel. Nichelul măreşte duritatea elementului de bază, a cuprului, fără însă a-i micşora alungirea. De asemenea, măreşte rezistenţa la tracţiune, rezilienţa şi rezistenţa la coroziune.

În STAS 3439-52 este standardizată sîrma de alamă cu nichel pentru arcuri, avînd următoarea compoziţie: 58% Cu; 34—39,8% Zn; 3,5% Ni; Pb$\leqslant$0,5%, Al$\leqslant$0,1%, Fe$\leqslant$0,2%, 0,2% diferite impurităţi.

Arcurile din acest aliaj rezistă la aceleaşi medii corosive la care rezistă şi alămurile industriale, însă în concentraţii mai mari prezintă caracteristici mecanice mai bune, mai ales în ce priveşte stabilitatea

proprietăților elastice în timp. Sînt supuse și ele pericolului fisurării în timpul funcționării datorită tensiunilor remanente.

Aliajul Neusilber (18–28% Zn; 13,5–19% Ni, restul cupru) are proprietăți anticorosive bune atît la temperatura obișnuită, cît și la temperaturi ridicate. În general, un conținut mai mare de 10% nichel dă alamei o culoare albă și proprietatea de a se lustrui bine. Nichelul scumpește însă foarte mult materialul. În STAS 1096-50 este standardizat materialul cu simbolul APC 55.18, care corespunde acestui aliaj.

Aliajul Neusilber se folosește frecvent la fabricarea arcurilor de telefon, datorită faptului că are un modul de elasticitate mai mare decît al celorlalte alămuri, asigurînd prin aceasta o presiune de contact foarte bună.

Alama specială cu adaos de aluminiu (20,5% Zn, 6% Ni, 1,5% Al, restul cupru) are o rezistență la tracțiune mai mare decît a celorlalte alămuri și o rezistență la coroziune superioară, datorită prezenței aluminiului. Aliajul respectiv putînd fi tratat termic, arcurile nu sînt afectate de defectele provocate de tensiunile remanente (tensiuni apărute la formarea arcului).

### 2.3.3. Bronzuri pentru arcuri

**Bronz fosforos.** Staniul adăugat cuprului îi mărește rezistența la rupere, duritatea și rezistența la uzură, îi micșorează însă reziliența și alungirea. Aliajele care se folosesc la fabricarea arcurilor conțin staniu în proporție de 5–9%.

În STAS 93-62 sînt indicate, ca aliaje de bronz cu staniu pentru arcuri, aliajele Bz6 și Bz8.

În general arcurile din bronz fosforos sînt destinate să lucrez în medii corosive; sînt mai rezistente la coroziunea apei de mare, la soluții slab acide în general și la aburi decît alămurile.

Prezintă, de asemenea, o bună rezistență mecanică, rezistența la oboseală și o limită elastică ridicată.

Aliajul respectiv se durifică numai prin tratament termic.

Aliajele cu 1% Sn sînt indicate pentru execuția arcurilor cu conductibilitatea electrică mare, însă sub sarcini nu prea mari.

**Bronz cu siliciu.** Siliciul intră în componența bronzurilor ca înlocuitor al staniului, în scopul obținerii unui bronz mai ieftin. Materialul pentru arcuri se elaborează cu un conținut de 2–5% Si. Un adaos scăzut de mangan îi îmbunătățește proprietățile.



În general, arcurile din bronz cu siliciu, acolo unde condițiile de lucru nu sînt prea severe, înlocuiesc cu succes arcurile din bronz cu staniu (bronz fosforos).

**Bronz cu cadmiu și bronz cu crom.** Atît cadmiul, cît și cromul, în procente reduse (în jur de 1%) măresc rezistența la rupere a cuprului, fără a-i micșora sensibil conductibilitatea electrică. Arcurile respective se utilizează acolo unde se cere o conductibilitate electrică ridicată în condiții de solicitări mecanice importante.

**Bronz cu aluminiu.** Aluminiul mărește rezistența la coroziune, rezistența la rupere și duritatea, fără a micșora sensibil alungirea.

Conținutul în aluminiu nu poate depăși procentul de 10%, peste care bronzul devine fragil. În tabela 2.3 se dau caracteristicile aliajului corespunzător compoziției 88,9% Cu și 11,1% Al, supus unei căliri la 900°C, urmată de o operație de maturizare la 500°C.

Bronzul de aluminiu laminabil este standardizat conform STAS 203-53.

Arcurile din bronz de aluminiu se folosesc pentru rezistența lor la coroziune, mult superioară arcurilor din alamă sau bronz fosforos. Ele rezistă la acțiunea bioxidului de carbon, a acizilor organici; în apa de mare prezintă o stabilitate comparabilă cu arcurile din cele mai bune oțeluri inoxidabile. Sînt mai puțin rezistente față de baze și mai ales față de acizii minerali concentrați.

Bronzurile de aluminiu sînt mai puțin deficitare decît bronzurile cu staniu corespunzătoare.

**Bronz cu beriliu.** Aliajele de cupru și beriliu, denumite și bronzuri $\alpha$ cu beriliu, prezintă un interes deosebit la fabricarea arcurilor, cărora le transmite calități superioare. Conținutul în beriliu al acestor bronzuri este de 2–3%; un adaos de cîteva procente de nichel, cobalt sau siliciu favorizează obținerea unei structuri fine.

Pentru orientare, în tabela 2.3 sînt indicate caracteristicile mecanice și fizice ale aliajului cu compoziția: 97,5% Cu; 2% Be; 0,5% Co.

Valorile caracteristicilor mecanice și fizice corespunzătoare aliajului indicat se referă la materialul călit în apă la 800°C, iar apoi supus unei îmbătrîniri artificiale la 350°C.

Arcurile din bronz de beriliu se folosesc ca:

— arcuri care lucrează în medii corosive (apă sărată, majoritatea bazelor, acid acetic, sărurile acidului sulfuric, mercur) și sub sarcini variabile;

— arcuri pentru aparate de precizie, avînd proprietăți elastice ridicate, stabile în timp și la temperatură ridicată; solicitările la temperaturi de 150–200°C pot fi aplicate timp nelimitat fără o micșorare a rezistenței;

— arcuri pentru diferite aparate electrice, avînd o bună conductibilitate electrică;

— arcuri rezistente la oboseală; arcuri la care survin pierderi reduse datorită histerezisului elastic;

— arcuri de ceasornice, amagnetice, arcuri manometrice, tuburi gofrate, membrane și capsule.

Prețul de cost ridicat limitează însă utilizarea arcurilor din bronz de beriliu.

### 2.3.4. Aliaje Cu-Ni pentru arcuri

**Aliajul Monel.** În tabela 2.2 sînt date compoziția chimică, precum și caracteristicile mecanice și fizice obținute în urma prelucrării la rece a acestui aliaj.

Arcurile din aliajul Monel sînt folosite datorită rezistenței lor la coroziune, datorită rezistenței la oboseală și remarcabilelor proprietăți elastice care se păstrează pînă la temperaturi de 200°C.

**Aliajul Monel — K.** Adăugînd aliajului Monel 3—6% Al și aplicîndu-i tratamentul termic corespunzător de călire prin precipitare, pe lîngă proprietățile caracteristice materialului de bază, se obține o rezistență și o duritate înaltă, fără ca alungirea să se micșoreze.

**Aliajul Nichel —Z.** Acest aliaj cuprinde circa 98% Ni, iar în rest diferite adaosuri de cupru, mangan, fier și siliciu. Este folosit la fabricarea arcurilor datorită proprietăților lui elastice superioare, pe care le păstrează chiar la temperaturi ridicate.

### 2.3.5. Semifabricate din aliaje de cupru

Semifabricatele din aliaje de cupru, avînd diferite grade de durități, se folosesc în funcție de natura aliajului și condițiile de execuție a arcului.

La aliajele durificabile numai prin ecruisare, semifabricatul trebuie să posede deja caracteristicile mecanice impuse arcului, care se obțin prin deformarea materialului la rece.

În diagrama din fig. 2.11 se dau relațiile de legătură dintre reducerea procentuală a secțiunii și creșterea rezistenței materialului pentru o sîrmă (*a*) și o lamelă (*b*) din bronz fosforos cu 6% Sn, pentru o sîrmă (*c*) și o lamelă (*f*) de alamă cu 70% Cu și 30% Zn și pentru o sîrmă (*d*) și o lamelă (*e*) de Neusilber cu 18% Ni.



În diagrama din fig. 2.12, *a* se arată legătura între reducerea procentuală a secțiunii semifabricatului și variația caracteristicilor mecanice (rezistența la rupere — a, reducerea suprafeței secțiunii în procente — b, limita de elasticitate — c, limita de proporționalitate — d, alungirea — e), pentru o lamelă de alamă cu 70% Cu și 30% Sn. În fig. 2.12, *b* se dă aceeași relație de legătură, însă în funcție de duritatea alamei.

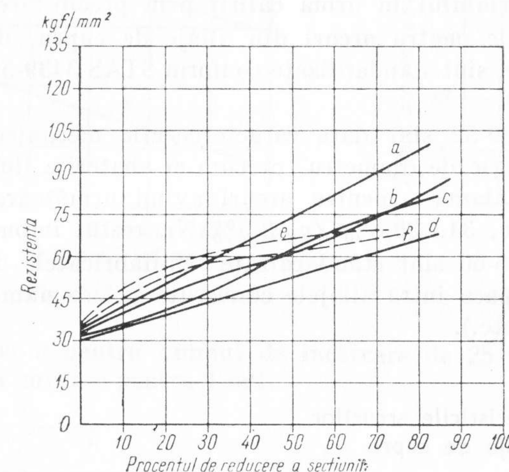



Fig. 2.11

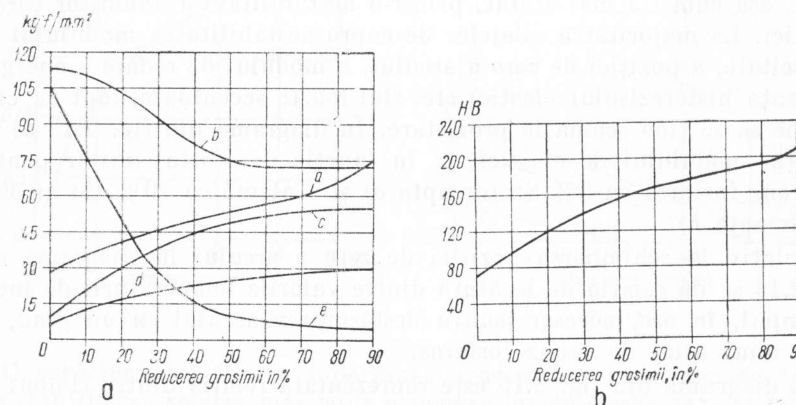



Fig. 2.12

Semifabricatele din categoria aliajelor care se durifică prin deformare la rece sau prin tratament termic se folosesc:

— în stare durificată, atunci cînd solicitările la executarea arcului permit;

— în stare moale sau parţial ecruisat, cînd condiţiile de înfăşurare sînt mai severe, proprietăţile mecanice corespunzătoare urmînd să fie imprimate materialului în urma călirii prin precipitare.

Semifabricatele pentru arcuri din aliaje de cupru, durificate prin prelucrare la rece, sînt standardizate conform STAS 3439-52, STAS 93-62 şi STAS 1096-60.

În STAS 3439-52 sînt date caracteristicile mecanice, diametrele, greutatea în funcţie de diametru, precum şi abaterile limită la diametrele sîrmei de alamă — pentru arcuri avînd următoarea compoziţie chimică: 58% Cu, 34...39,8% Zn, 3,5% Ni, restul impurităţi.

În STAS 1096-60 sînt standardizate semifabricatele din alpaca (în denumirea de alpaca intră aliajele cunoscute şi sub numele de Neusilber, Maillchort etc.).

### 2.3.6. Caracteristicile arcurilor din aliaje de cupru

Comportarea arcurilor la temperatura normală de lucru se caracterizează, aşa cum s-a mai arătat, printr-o nestabilitate a anumitor caracteristici. La majoritatea aliajelor de cupru nestabilitatea modulului de elasticitate, a poziţiei de zero a arcului, a modului de redare a energiei (prezenţa histerezisului elastic) etc. sînt foarte accentuate, fapt de care trebuie să se ţină seama la proiectare. În diagrama din fig. 2.13 se dă variaţia modulului de elasticitate în funcţie de efortul unitar pentru un bronz fosforos cu 5% Sn (dreapta *a*) şi o alamă cu 70% Cu şi 30% Zn (dreapta *b*).

Relativ la schimbarea poziţiei de zero a arcului în diagrama din fig. 2.14 se dă relaţia de legătură dintre valorile temperaturii de lucru şi timpul, în ore, necesar pentru desfăşurarea arcului cu un grad, în cazul unui aliaj de bronz fosforos.

În diagrama din fig. 2.15 este reprezentată relaţia dintre timpul de încărcare a unui arc din bronz de beriliu şi abaterea în procente a deformaţiei; iar în diagrama din fig. 2.16 se dă relaţia dintre timpul de revenire şi abaterea în % a deformaţiei faţă de linia de zero, pentru bronz fosforos. Curba *a* pentru timpul de încărcare de 25 de ore, curba *b* pentru 5 ore şi curba *c* pentru 1 oră.



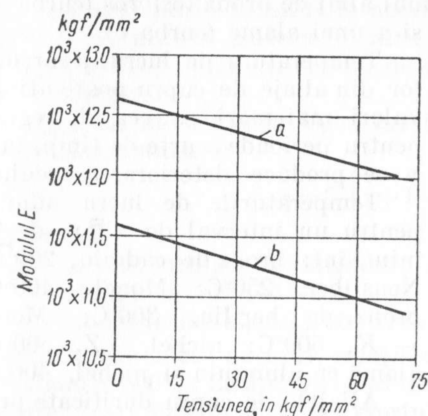


Fig. 2.13

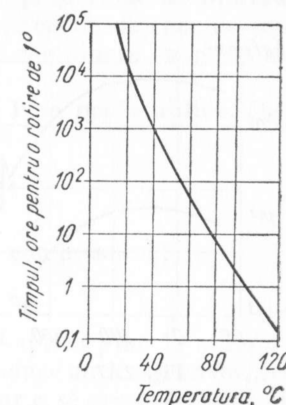


Fig. 2.14

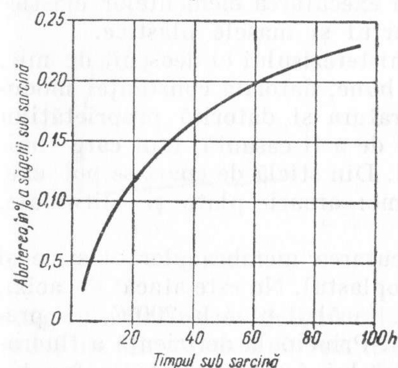


Fig. 2.15

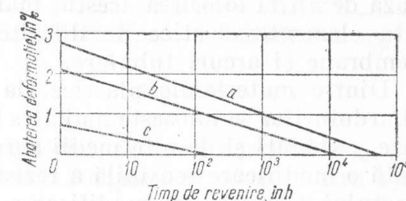


Fig. 2.16

O caracteristică foarte importantă a arcurilor din aliaje de cupru este stabilitatea relativ mai bună a modulului de elasticitate la tempe-

raturi ridicate, în comparaţie cu a arcurilor din oţel. În diagrama din fig. 2.17 este reprezentată variaţia modulului de elasticitate transversal în funcţie de temperatură în cazul unui aliaj de bronz fosforos (curba *a*) şi a unei alame (curba *b*).

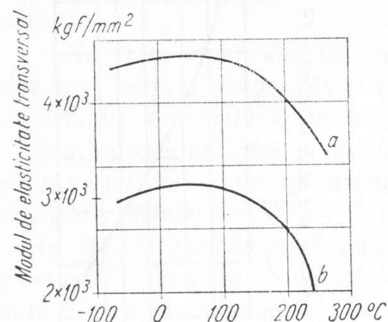


Fig. 2.17

Temperatura de lucru a arcurilor din aliaje de cupru poate atinge valori mai mari ca cea de regim, pentru perioade scurte de timp, fără a se produce deteriorarea arcului.

Temperaturile de lucru admise pentru un interval de timp de 15 min sînt: bronz de cadmiu, 200°C; Neusilber, 250°C; Monel, 400°C; bronz de beriliu, 300°C; Monel — *K*, 500°C; nichel — Z, 500°C; alamă cu aluminiu şi nichel, 400°C.

Aliajele de cupru durificate prin tratament termic se pot supune la temperaturi de lucru mult mai mari decît cele durificate prin ecruisaj.

## 2.4. Materiale nemetalice

Din această categorie de materiale la executarea elementelor elastice se utilizează îndeosebi: cauciucul, cuarţul şi masele plastice.

Sticla de cuarţ se foloseşte datorită histerezisului ei deosebit de mic, datorită proprietăţilor ei elastice foarte bune, datorită constanţei modulului de elasticitate în raport cu temperatura şi datorită proprietăţilor ei anticorosive. Prezintă inconvenientul de a fi casantă, fapt care limitează de altfel folosirea acestui material. Din sticlă de cuarţ se pot executa elemente elastice de diferite forme: arcuri plate şi elicoidale, membrane şi arcuri tubulare.

Dintre materialele plastice, la executarea membranelor elastice şi a burdufurilor se foloseşte mai ales fluoroplastul. Nu este atacat de acizi, baze, oxidanţi şi de alte medii agresive. Încălzit pînă la 200°C, nu prezintă o modificare sensibilă a rezistenţei. Principala deficienţă a fluoroplastului o constituie modificarea modulului de elasticitate în funcţie de temperatură.

Utilizare foarte largă în executare elementelor elastice o au diferitele tipuri de cauciuc. Comparativ, cauciucul natural are proprietăţi elastice superioare cauciucului sintetic. În schimb, sub acţiunea luminii, a căldurii, a oxigenului din aer, a unor agenţi cum ar fi uleiurile sau benzina, cauciucul natural îşi pierde proprietăţile elastice. Cauciucul sintetic este mai puţin sensibil la aceste influenţe şi tinde să înlocuiască cauciucul natural ca material pentru arcuri. Arcurile de cauciuc se execută din blocuri, plăci şi tuburi de cauciuc, combinate cu piese metalice de armare.



Cauciucul nu urmează legea lui Hooke. I se poate aplica, însă, o relaţie asemănătoare:

$$\sigma = G\left[\varepsilon + 1 - \frac{1}{(\varepsilon+1)^2}\right],$$

în care:

$\sigma$ este efortul unitar de întindere sau de compresiune;
$\varepsilon$ — alungirea relativă;
$G$ — modulul de elasticitate transversal.

Pentru cauciucul natural, relaţia se poate aplica pînă la alungiri de aproximativ 300%. La alungiri mai mari se produce un fenomen de „recristalizare", care face ca valoarea efortului unitar $\sigma$ să crească brusc. În ce priveşte temperatura, relaţia este valabilă între — 30°C şi +100°C.

Caracteristicile mecanice ale cauciucului sînt cu totul deosebite ca valoare de cele ale oţelurilor şi, în general, de cele ale metalelor. Astfel, rezistenţa de rupere a cauciucului moale este de aproximativ 200 kgf/cm²,

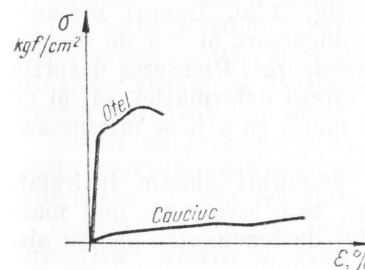


Fig. 2.18

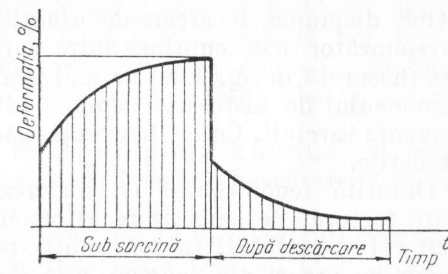


Fig. 2.19

alungirea relativă maximă a aceluiaşi material, de aproximativ 550%, iar modul de elasticitate $E$=40...80 kgf/cm². Diagramele $\sigma$—$\varepsilon$ pentru oţel şi cauciuc din fig.2.18, trasate la aceeaşi scară, arată această deosebire.

**Efectul elastic întîrziat.** După aplicarea sarcinii, deformaţia pieselor de cauciuc continuă să crească, După aproximativ 10 minute, variaţia deformaţiei devine neglijabilă. Analog, la descărcare, deformaţia nu dispare complet, ci treptat (v. fig. 2.19). Acest fenomen este uneori

denumit şi „curgere rece". El este, de fapt, comun tuturor materialelor, cu deosebirea că la multe este atît de redus, încît poate fi neglijat la temperatura normală, ca de exemplu la oţel. În legătură cu acest fenomen apare necesitatea precizării noţiunii de „modul de elasticitate" pentru cauciuc. Modulul de elasticitate static la cauciuc este cel care corespunde valorii finale a deformaţiei (după aproximativ 10 min de la aplicarea sarcinii). În cazul sarcinilor variabile periodic, calculul trebuie să se efectueze ţinînd seama de modulul de elasticitate dinamic, de valoare mai mare decît modulul de elasticitate static şi influenţat de frecvenţă. În practică se ia:

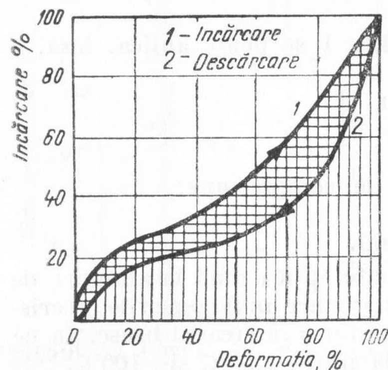


Fig. 2.20

$$E_d = QE_{st},$$

unde coeficientul dinamic $Q=1...1,25$.

Fenomenul de histerezis elastic pronunţat este caracteristic cauciucului. Presupunînd o încărcare şi o descărcare lentă şi progresivă, se obţine diagrama încărcare-deformaţie din fig. 2.20. Lucrul mecanic corespunzător ariei cuprinse între curba de încărcare şi cea de descărcare (haşurată în fig. 2.20) nu mai poate fi recuperat. Pierderea datorită fenomenului de histerezis depinde atît de viteza deformaţiei, cît şi de frecvenţa sarcinii. Cu cît frecvenţa este mai mare, cu atît se micşorează pierderile.

Datorită fenomenului de histerezis şi efectului elastic întîrziat, apare factorul de amortizare al cauciucului, care este mult mai mare decît cel al oţelului. În consecinţă, pericolul de rezonanţă, pentru sistemele cu arcuri din cauciuc, este redus.

Temperatura influenţează negativ asupra calităţilor cauciucului: atît modulul de elasticitate, cît şi rezistenţa de rupere scad cu creşterea temperaturii. Coeficientul de dilataţie liniară a cauciucului este:

$$\alpha=(1,6...2)\ 10^{-4}.$$

# 3. Arcuri în foi

## 3.1. Arcuri lamelare

### 3.1.1. Generalităţi

Arcurile lamelare sînt construite dintr-o singură foaie sau lamelă de arc, a cărei fibră medie poate fi după o linie dreaptă sau după o curbă oarecare. O astfel de lamelă este prinsă de obicei la un capăt printr-un sistem de încastrare, în timp ce la capătul liber acţionează sarcina care solicită arcul.

Modul de prindere a lamelei la capete poate fi realizat în foarte multe feluri. Se întîlnesc numeroase arcuri lamelare încastrate la ambele capete sau simplu rezemate la ambele capete.

O primă categorie de arcuri lamelare o constituie acele arcuri la care deformaţiile datorite încovoierii se pot considera relativ mici faţă de lungimea lamelei, forma deformată fiind relativ apropiată de cea nedeformată.

O a doua categorie de arcuri lamelare o constituie acele arcuri la care deformaţiile datorite încovoierii sînt relativ mari, astfel încît sub sarcină arcul lamelar ia forme foarte diferite.

### 3.1.2. Arcuri lamelare cu deformaţii mici

Arcurile lamelare cu deformaţii mici se utilizează, în general, în mecanisme şi dispozitive la care forţa de solicitare nu este prea mare. Cea mai mare utilizare a acestor tipuri de arcuri lamelare se întîlneşte

la construcţia aparatelor şi instrumentelor de măsură, precum şi la construcţia dispozitivelor.

Exemple de utilizare a acestor tipuri de arcuri lamelare sînt indicate în fig. 3.1, lamelele de contact de la releele electromagnetice; în fig. 3.2,

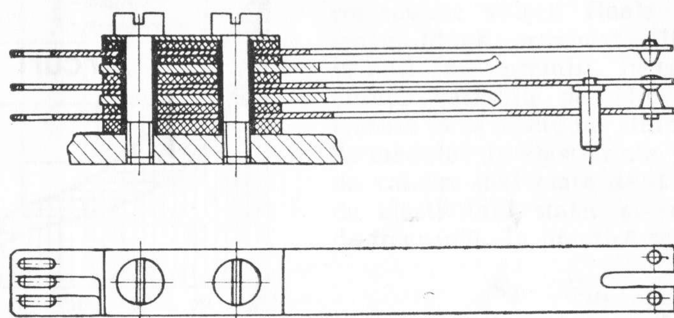


Fig. 3.1

arcurile lamelare folosite la un controler cu tobă şi în fig. 3.3, arcul lamelar folosit la apăsarea unei pene mobile.

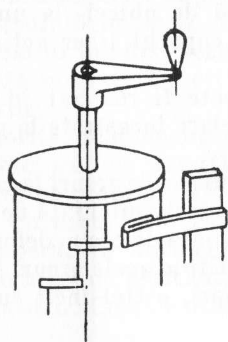


Fig. 3.2

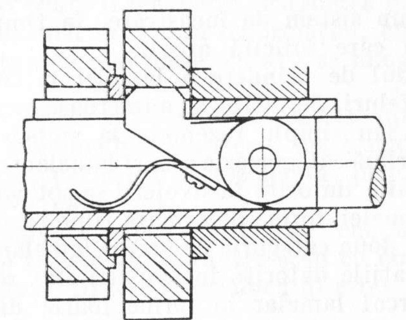


Fig. 3.3

Arcurile lamelare se pot întîlni şi ca arcuri cu scop de suspensie elastică şi de acumulare de lucru mecanic ca, de exemplu, la ciururile de la batoze sau arcul de suspensie de la scaunul tractoristului etc.



3.1.2.1. Arcul lamelar încastrat la un capăt

Arcurile lamelare încastrate la un capăt şi încărcate cu o sarcină concentrată la celălalt capăt, care au în stare nedeformată fibra medie o linie dreaptă, sînt cele mai simple. În practică se întîlnesc foarte multe variante constructive de arcuri lamelare, cele mai utilizate tipuri fiind însă: arcul lamelar dreptunghiular, arcul lamelar triunghiular şi arcul lamelar trapezoidal. Arcurile lamelare pot avea pe toată lungimea lor secţiunea constantă sau variabilă. Această variaţie a secţiunii poate fi liniară sau parabolică. Deoarece, în principiu, desfăşurarea calculului pentru aceste arcuri este aceeaşi, în tabela 3.1 sînt arătate calculele principalelor elemente.

3.1.2.2. Arcul lamelar dreptunghiular cu braţ dublu

Acest tip de arc se execută dintr-o lamelă dreptunghiulară, puţin curbată şi prevăzută la capete cu două îndoituri de reazem (fig. 3.4). Arcul lamelar de acest tip se foloseşte ca arc de apăsare continuă în capetele $A$ şi $B$, sub acţiunea forţei $P$, aplicată în mijlocul lamelei. În timpul funcţionării, curbura lamelei variază.

Folosind notaţiile din figura 3.4 se pot determina relaţiile principale, necesare dimensionării unei astfel de lamele. Astfel, efortul unitar maxim la încovoiere, în mijlocul lamelei, este:

$$\sigma_{i\,max} = \frac{3Fl}{bh^2} = \frac{1{,}5Pl}{bh^2} \leqslant \sigma_{ai}. \quad (3.1)$$

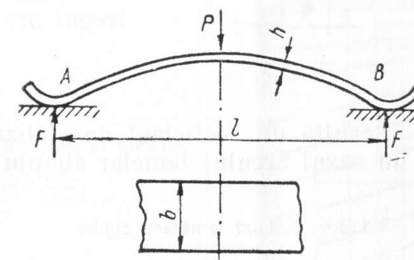



Fig. 3.4

Săgeata arcului în dreptul forţei $P$ aplicată la mijlocul lamelei este dată de relaţia:

$$f = \frac{Fl^3}{24EI}, \quad (3.2)$$

sau ţinînd seama de relaţia (3.1)

$$f = \frac{1}{6}\frac{l^2}{h}\frac{\sigma_{i\,max}}{E}. \quad (3.3)$$

Lucrul mecanic al forței $P$ este acumulat ca energie de deformație și este dat de relația:

$$L=\frac{Pf}{2}=W=\frac{1}{18}\,V\,\frac{\sigma_{i\,max}^{2}}{E}. \qquad (3.4)$$

### 3.1.2.3. Arcul lamelar dreptunghiular dublu încastrat

Acest tip de arc se execută dintr-o lamelă dreptunghiulară care se încastrează la ambele capete (fig. 3.5). Prin modul lui de utilizare, indicat și în figură, el poate fi asimilat cu două arcuri lamelare dreptunghiulare simplu încastrate, puse cap la cap. Folosind notațiile din figură se pot determina relațiile de calcul:

— pentru săgeată

$$f=\frac{1}{3}\cdot\frac{l^2}{h}\cdot\frac{\sigma_{i\,max}}{E}; \qquad (3.5)$$

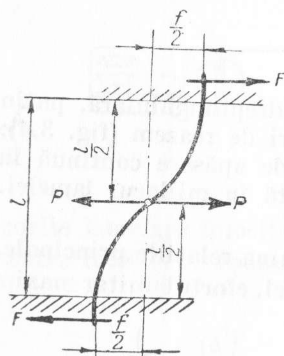


Fig. 3.5

— reacțiunea din încastrare $F$ este egală cu forța de încărcare $P$ determinată cu relația următoare:

$$P=\frac{bh^2}{6}\cdot\frac{\sigma_{i\,max}}{\frac{l}{2}}. \qquad (3.6)$$

— energia de deformare acumulată de întregul arc

$$W=\frac{1}{18}\,V\,\frac{\sigma_{i\,max}}{E}. \qquad (3.7)$$

Rezultă un coeficient de utilizare volumetric specific $\eta=0{,}111$, ca și în cazul arcului lamelar simplu încastrat la un capăt.

### 3.1.2.4. Arcuri lamelare curbe

În foarte multe dispozitive și mai ales în construcția aparatelor și a instrumentelor se întîlnesc arcuri lamelare care au linia medie curbă. În cele ce urmează vor fi luate în considerare acele arcuri pentru care, sub acțiunea forțelor, deformațiile arcului sînt relativ mici, astfel că alura arcului deformat nu este schimbată față de alura arcului nedeformat. Calculele necesare pentru dimensionarea și pentru determinarea deformațiilor (săgeților) la aceste tipuri de arcuri se fac după metodele

| Elemente de calcul | Simbolul | Unități | Relație de definiție |
|---|---|---|---|
| Secțiunea transversală în x | $A_x$ | cm² | $A$ |
| Momentul de inerție în x | $I_x$ | cm⁴ | $I$ |
| Momentul de încovoiere în x | $M_x$ | kg·cm | $M=P(l-x)$ |
| Derivata a doua a curbei elastice | $y''$ | $\frac{1}{cm}$ | $y''=\frac{M}{EI}$ |
| Înclinarea | $y'$ | rad | $y'=\int_0^x y''dx$ |
| Ecuația fibrei medii deformate (curbei elastice) | $y$ | cm | $y=\int_0^x y'dx$ |

obişnuit folosite în calculul barelor curbe. Deoarece în practică se întîlnesc curent anumite tipuri de arcuri lamelare curbe, în tabela 3.2 sînt indicate relaţiile de calcul pentru astfel de arcuri.

### 3.1.2.5. Arcuri în bucle plane multiple

Arcurile în bucle plane multiple, solicitate la încovoiere (fig. 3.6), pot fi folosite ca arcuri de compresiune, tipul $A$, sau ca arcuri de întindere, tipul $B$. Acest tip de arc are o caracteristică liniară şi poate fi utilizat în aceleaşi scopuri ca şi arcul elicoidal cilindric. Calculul exact al acestui tip de arc se face după metodele de calcul utilizate pentru barele curbe. Pentru un calcul aproximativ, satisfăcător cerinţelor practicii, se folosesc relaţii aproximative care dau erori sub 3%.

În acest caz se consideră că porţiunile de la capetele arcului sînt inactive şi nu se deformează, porţiunea activă fiind considerată cea cuprinsă între punctele $a$ şi $b$ indicate în figură; Echivalent spirei de la arcul elicoidal, la aceste arcuri este o buclă sau o ramură care este compusă dintr-o porţiune dreaptă şi din cele două sferturi de cerc racordate la capetele porţiunii drepte. Majoritatea arcurilor de acest tip se confecţionează din sîrme sau din bare de secţiune circulară sau pătrată. Pentru calcul se folosesc următoarele notaţii:

$d$ — diametrul sîrmei de secţiune circulară sau latura pătratului;
$E$ — modulul de elasticitate al materialului din care este confecţionat arcul;
$I$ — momentul de inerţie al secţiunii transversale a sîrmei;
$P$ — forţa (sarcina) care acţionează asupra arcului;
$R$ — raza de curbură;
$l$ — lungimea porţiunii drepte;
$y$ — săgeata corespunzătoare unei ramuri;
$\alpha$ — unghiul iniţial între porţiunile drepte;
$\sigma$ — efort unitar total.
$k = \frac{l}{R}$, raportul de formă al arcului.

Relaţiile de calcul aproximativ care pot fi utilizate în practică, pentru determinarea săgeţii şi pentru dimensionare, asigurînd o eroare de 3%, sînt:

— pentru săgeata

$$y = \frac{PR^3}{12EI}\left(\frac{l^3}{R^3} + 9{,}43\frac{l^2}{R^2} + 24\frac{l}{R} + 18{,}85\right) \quad (3{,}8)$$

— efortul unitar pentru secţiunea circulară

$$\sigma = P \cdot \frac{\left(10{,}19\,\frac{R}{d} + 5{,}09\,\frac{l}{d}\right)\left(1 + \frac{1}{\frac{10}{3}\,\frac{R}{d} - \frac{5}{3}}\right) + 1{,}28}{d^2} \quad (3.9a)$$

Fig. 3.6



— efortul unitar pentru secţiunea pătrată

$$\sigma = P\,\frac{\left(6\,\frac{R}{d} + 3\,\frac{l}{d}\right)\left(1 + \frac{1}{4\,\frac{R}{d} - 2}\right) + 1}{d^2} \quad (3.9b)$$

În aceste relaţii s-a neglijat influenţa unghiului de înclinare iniţială $\alpha$, care s-a considerat zero; prin aceasta, eroarea în calcule nu depăşeşte 3%.

Fig. 3.7

Pentru un calcul mai rapid se utilizează nomograme din care se pot determina direct rezultatele dorite. În fig. 3.7 este reprezentată o astfel de nomogramă de calcul.

Această nomogramă servește la determinarea diametrului $d$ și a raportului de formă $k=\frac{l}{R}$ al arcului cunoscînd săgeata repartizată pe o ramură (spiră), efortul unitar admisibil și forța $P$ care acționează arcul. În nomogramă sînt reprezentate la scară valorile săgeții $y$, diametrului sîrmei $d$, raportului $\frac{P}{\sigma}$ și produsului $P.\sigma$, precum și curbele de calcul stabilite în funcție de rapoartele $k=\frac{l}{R}$ și $\frac{R}{d}$. Se unește cu o dreaptă punctul $B$. care indică pe scara respectivă valoarea produsului $P.\sigma$, cu punctul $A$. care indică pe scara săgeților valoarea săgeții. Această dreaptă intersectează în $C$ latura verticală a nomogramei. Se duce din $C$ o orizontală care intersectează curbele indicate de raportul $\frac{R}{d}$, și se alege punctul $D$ în funcție de acest raport. Din punctul $D$ se duce o verticală $DE$ pînă la caracteristica secundă a aceluiași raport $\frac{R}{d}$, care este numerotată cu același număr de ordine și indicația secund (''). Din punctul $E$ astfel determinat se duce orizontala $EF$ la marginea din stînga a diagramei. Se unește punctul $F$ astfel determinat cu punctul $C$ corespunzător de pe scara raportului $\frac{P}{\sigma}$ cu o linie drepată. Punctul $H$ determinat la intersecția acestei drepte la scara diametrelor sîrmei dă valoarea acestui diametru. Curbele caracteristice desenate cu linie plină corespund secțiunii circulare, iar cele cu linie întreruptă secțiunii pătrate.

### 3.1.3. Arcuri lamelare plane, cu deplasări și deformații mari

La arcurile lamelare prezentate anterior se consideră că deplasările care apar sub sarcină, precum și schimbările dimensiunilor și ale formei lamelei elastice încărcate sînt relativ mici, astfel că la alcătuirea ecuațiilor de echilibru se poate considera sistemul nedeformat. În acest fel, la aceste tipuri de arcuri se poate aplica principiul invariantei dimensiunilor inițiale, precum și principiul suprapunerii efectelor.

În cazul arcurilor lamelare cu deplasări și deformații mari, aceste principii nu mai pot fi aplicate. Datorită deplasărilor mari și schimbării formei lamelei elastice, lungirea specifică maximă care apare în lamelă este dată de relația: $\varepsilon_{max}=\frac{h}{2\rho}$, unde $h$ este grosimea lamelei și $\rho$ — raza de curbură a axei lamelei în punctul considerat. Dacă grosimea



lamelei $h$ este mică, deformațiile lamelei pot fi complet elastice, chiar dacă lamela suferă în ansamblu deformații mari.

Din punctul de vedere al desfășurării calculelor trebuie avut în vedere faptul că, în ecuația diferențială a curburii liniei elastice a unei grinzi:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}, \quad (3.10)$$

variația razei de curbură este foarte mare, iar valorile tangentelor $y'$ nu mai sînt neglijabile. Din această cauză aproximarea care se face în cazul deformațiilor mici ale lamelei, scriind ecuația diferențială sub forma:

$\frac{1}{\rho}\approx y''=+\frac{M}{EI}$, nu mai este posibilă în cazul lamelelor flexibile cu deplasări și deformații mari.

Dacă deplasările nu sînt mici, însă nu sînt nici prea mari, ecuația diferențială se poate transforma prin dezvoltare în serie sub forma:

$$\frac{1}{\rho}\approx y''\left(1-\frac{3}{2}y'^2\right)=+\frac{M}{EI}. \quad (3.11)$$

Dacă deplasările sînt mari sau foarte mari, ecuația diferențială devine:

$$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{R}=\frac{M}{E'I}, \quad (3.12)$$

unde $R$ este raza de curbură inițială a lamelei în stare nedeformată, iar

$$E'I=\frac{EI}{1-\mu^2} \quad (3.13)$$

este rigiditatea cilindrică ($\mu$=coeficientul lui Poisson).

Pentru primele două categorii arătate, calculele se desfășoară obișnuit, pe baza rezolvării ecuațiilor diferențiale indicate.

Pentru cazul deplasărilor mari, desfășurarea calculelor este mult mai dificilă și pentru anumite situații problema nu este rezolvată pe baza unei metode unitare. Problema barelor flexibile cu deplasări mari, din categoria cărora fac parte aceste arcuri lamelare cu deplasări mari, a fost atacată inițial în anul 1744 de Leonard Euler, urmat apoi de Kirchhoff care a pus bazele teoriei generale a deplasărilor mari în anul 1850, pentru barele solicitate în domeniul elastic. Problema a fost și este și în

prezent studiată de foarte mulţi cercetători. Arcurile lamelare cu deplasări mari se caracterizează prin următoarele condiţii:

— lamela are axa sau forma unei curbe plane;

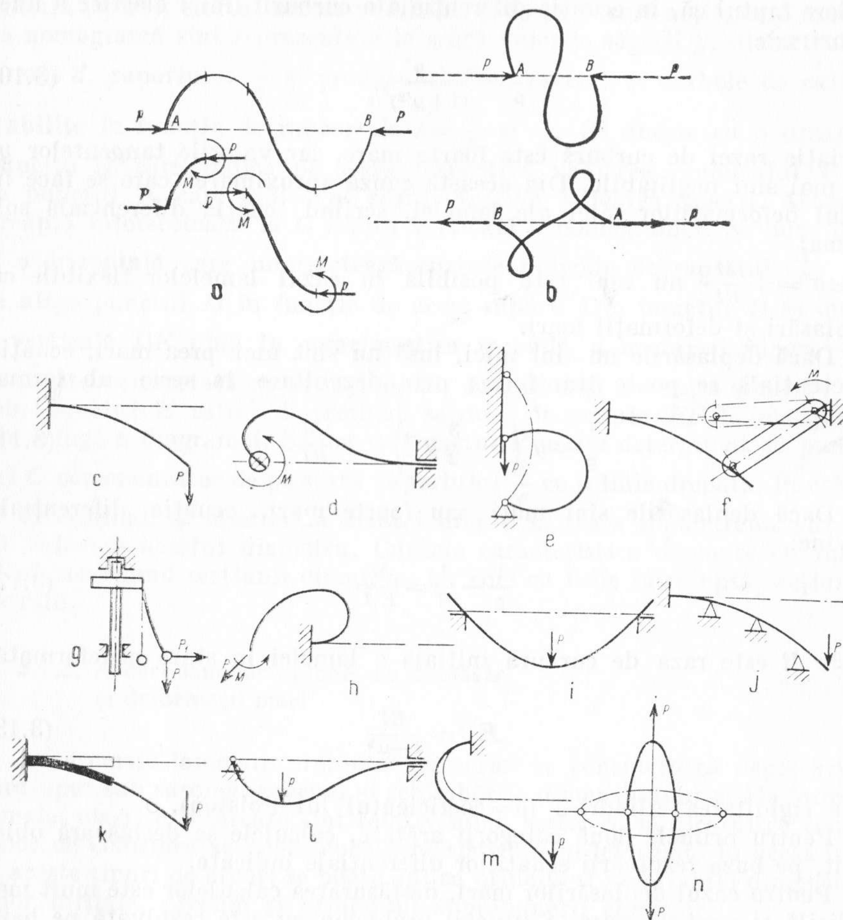



Fig. 3.8

— lamela poate fi împărţită în porţiuni distincte, astfel ca în limitele fiecărei porţiuni rigiditatea la încovoiere să rămînă constantă;

— curbura iniţială a barei este constantă sau egală cu zero;



— sarcinile exterioare sub formă de forţe sau momente încovoietoare acţionează la capetele porţiunii sau în puncte intermediare.

În fig. 3.8, *a* şi *b* sînt reprezentate formele axelor lamelelor deformate, iar în fig. 3.8, *c-n* sînt date exemple de lamele elastice cu deplasări mari, deformate sub acţiunea sarcinilor aplicate. Cu linie întreruptă este indicată alura iniţială a lamelei, iar cu linie continuă este indicată lamela deformată.

### 3.1.4. Elemente de calcul pentru deducerea ecuaţiei liniei elastice

În fig. 3.9 este reprezentată porţiunea $OL$ a unei lamele elastice cu rigiditate constantă. Forma ei iniţială $OL_0$ este un arc de cerc de rază $R$. Lamela este încărcată la extremităţi cu forţe concentrate şi momente încovoietoare. Înainte de încărcare şi după încărcare lamela se consideră în echilibru. Pentru uşurarea calculelor se poate face ipoteza că lungimea arcului $OL$ rămîne neschimbată în timpul deformării şi deplasării lamelei, deformaţia la întindere sau la compresiune a lamelei fiind neglijabilă faţă de deplasările sistemului, datorită încovoierii. Din acest motiv se poate considera drept variabilă independentă în calculul pentru stabilirea formei elastice, lungimea arcului $s$ măsurat de la capătul $O$ spre capătul $L$.

Pentru urmărirea deplasărilor faţă de un sistem de referinţă fix şi pentru uşurarea calculului, se utilizează două sisteme de coordonate cu originea comună în $O'$. Sistemul de referinţă $O'xy$ este fix, iar sistemul $O'x'y'$ este mobil şi orientat permanent cu axa $O'x'$ după o direcţie paralelă cu direcţia forţelor $P$ din capetele lamelei. Unghiul de rotire al sistemului mobil faţă de cel fix se notează cu $\delta$.

Un punct oarecare $T$ al lamelei deformate se afla înainte de deformare într-un punct $T_0$, tangenta la linia lamelei nedeformate făcînd unghiul $\theta_0$ cu axa $O'x$, iar tangenta în $T$ la lamela deformată face, cu axele $O'x$ fixă şi $Ox'$ mobilă, unghiurile $\theta$, respectiv $\zeta$. Între coordonatele punctului $T$ faţă de sistemul fix şi cel mobil există relaţiile:

$$\theta=\zeta-\delta;\ x=x'\cos\delta+y'\sin\delta;\ y=y'\cos\delta-x'\sin\delta. \tag{3.14}$$

Curbura liniei elastice în punctul $T$ este dată de relaţia:

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{d\zeta}{ds}=\frac{1}{R}. \tag{3.15}$$

Pentru a putea determina ecuaţia diferenţială a încovoierii plane a lamelei este necesară expresia momentului încovoietor în acelaşi punct.

Momentul încovoietor în punctul $T$ are expresia:

$$M_T = P(y'_L - y') + M_L. \tag{3.16}$$

Ecuaţia diferenţială a încovoierii plane devine:

$$\frac{d\zeta}{ds} = \frac{P}{E'I}(y'_L - y') + \frac{M}{E'I} + \frac{1}{R}. \tag{3.17}$$

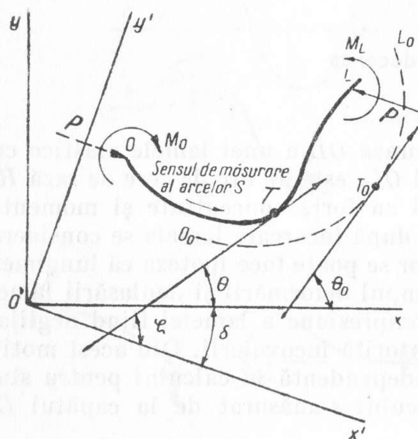



Fig. 3.9

Derivînd în raport cu $s$, se obţine:

$$\frac{d^2\zeta}{ds^2} = -\frac{P}{E'I}\frac{dy'}{ds}. \tag{3.18}$$

Ţinînd seama că $\frac{dy'}{ds} = \sin\zeta$, se poate scrie:

$$\frac{d^2\zeta}{ds^2} = -\frac{P}{E'I}\sin\zeta. \tag{3.19}$$

Folosind notaţia: $\beta = +l\sqrt{\frac{P}{E'I}}$, expresia devine:

$$l^2\frac{d^2\zeta}{ds^2} = -\beta^2\sin\zeta, \tag{3.20}$$

Aceasta este ecuaţia diferenţială a axei lamelei încovoiate, unde $l$ este lungimea lamelei $OL$.

Integrala întîi a acestei ecuaţii se poate scrie sub forma:

$$l\frac{d\zeta}{ds} = 2\beta\sqrt{D - \sin^2\frac{\zeta}{d}}, \tag{3.21}$$

unde $D$ este constanta de integrare.

Această ecuaţie leagă expresia curburii $\frac{d\zeta}{ds}$ într-un punct de valoarea unghiului $\zeta$, unghiul de înclinare a tangentei în acel punct faţă de axa $O'x'$ paralelă cu linia de acţiune a forţelor $P$.

Se poate constata uşor că linia de echilibru elastic a lamelei se poate caracteriza prin cîteva puncte caracteristice, şi anume puncte de compresiune $C$, puncte de întindere $\tilde{I}$ şi puncte de inflexiune $I$. În fig. 3.10 sînt reprezentate schematic două lamele cu punctele caracteristice corespunzătoare.



Forţa normală din secţiunea transversală este o forţă egală cu forţa $P$ aplicată în capătul lamelei, iar forţa tangenţială este nulă. Tangenta la linia elastică în punctele de compresiune este paralelă cu linia de acţiune a forţelor şi implicit cu axa $O'x'$, astfel că sensul pozitiv al tangentei coincide cu sensul pozitiv al axei $Ox'$. Rezultă că

$$\zeta = 2\pi n, \text{ deci } \sin^2\frac{\zeta}{d} = 0. \tag{3.22}$$

Curbura lamelei în punctul de compresiune are valoarea maximă dată de expresia

$$\frac{d\zeta}{ds} = \frac{2\beta}{l}\sqrt{D}. \tag{3.23}$$

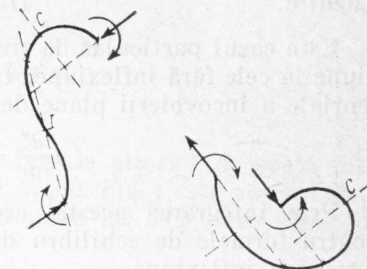



Fig. 3.10

În cazul punctelor de întindere, forţa normală în secţiunea transversală este egală cu $P$ şi o solicită la întindere. În acest caz rezultă

$$\zeta = \pi(2n+1) \text{ şi } \sin^2\frac{\zeta}{2} = 1, \tag{3.24}$$

iar curbura lamelei în punctul de întindere are valoarea minimă dată de expresia:

$$\frac{d\zeta}{ds} = \frac{2\beta}{L}\sqrt{D-1}. \tag{3.25}$$

În punctele de inflexiune, curbura liniei elastice este nulă. În acest caz rezultă

$$D = \sin^2\frac{\zeta}{2}. \tag{3.26}$$

Din ecuaţia (3.26) rezultă că valoarea constantei de integrare $D$ este totdeauna pozitivă. După cum $D$ este mai mic, egal sau mai mare ca 1, distingem următoarele feluri de curbe:

Cazul a. $D < 1$.

Pentru a avea puncte de inflexiune trebuie ca

$$D - \sin^2\frac{\zeta}{2} = O, \text{ deci } \sin^2\frac{\zeta}{2} < 1,$$

ceea ce este posibil. Aceste curbe au deci puncte de inflexiune la poziţia de echilibru.

Cazul b. $D > 1$.

Pentru aceeaşi condiţie rezultă că trebuie să avem $\sin^2 \frac{\zeta}{2} > 1$, ceea ce este imposibil.

Rezultă, deci, că la aceste curbe nu putem avea puncte de inflexiune la poziţia de echilibru.

Cazul c. $D=1$.

Este cazul particular de trecere de la poziţiile de echilibru cu inflexiune la cele fără inflexiune. În acest caz integrala întîi a ecuaţiei diferenţiale a încovoierii plane devine:

$$l\frac{d\zeta}{ds} = \pm 2\beta \cos \frac{\zeta}{2} \tag{3.27}$$

Prin integrarea acestei ecuaţii se poate determina parametrul $\beta$ pentru formele de echilibru de trecere de la forma fără inflexiune la forma cu inflexiune.

$$\beta = \left| ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi + \zeta L}{4}}{\operatorname{tg} \frac{\pi + \zeta_0}{4}} \right|, \tag{3.28}$$

unde $\zeta_0$ şi $\zeta_L$ sînt unghiurile de înclinare ale liniei elastice la începutul şi la sfîrşitul porţiunii respective a barei.

Integrarea ecuaţiei diferenţiale (3.21) se poate face prin introducerea unei noi variabile, $\psi$, şi anume:
pentru cazul $D<1$ al curbelor cu puncte de inflexiune, se notează:

$$D=k^2 \text{ şi } \sin\frac{\zeta}{2} = k \sin \psi, \tag{3.29, a}$$

iar pentru cazul $D>1$ al curbelor fără puncte de inflexiune se notează:

$$D=\frac{1}{k^2} \text{ şi } \sin\frac{\zeta}{2} = \sin \psi. \tag{3.29, b}$$

Ecuaţia diferenţială (3.21) a curbei elastice, în urma folosirii schimbărilor de variabile indicate, devine

$$l\frac{d\zeta}{ds} = 2\beta k \cos \psi \tag{3.30, a}$$

pentru curbele cu inflexiune;

$$l\frac{d\zeta}{ds} = \frac{2\beta}{k}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi} \tag{3.30, b}$$

pentru curbele fără inflexiune.



Prin integrare, după eliminarea lui $\zeta$, pe baza relaţiilor (3.29, *a*) şi (3.29, *b*) se obţine

$$\beta \cdot \frac{s}{l} = F(\psi) - F(\psi_0) \tag{3.31, a}$$

pentru curbele cu inflexiune;

$$\beta \cdot \frac{s}{l} = kF(\psi) - kF(\psi_0) \tag{3.31, b}$$

pentru curbele fără inflexiune.

În aceste relaţii funcţia $F(\psi)$ este integrala eliptică de speţa întîi pentru valoarea instantanee a unghiului $\psi$, iar $F(\psi_0)$ este aceeaşi integrală pentru valoarea iniţială $\psi=\psi_0$. Valoarea lui $F(\psi)$ este dată de

$$F(\psi) = \int_0^{\psi} \frac{\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}. \tag{3.32}$$

Expresiile (3.31, *a*) şi (3.31, *b*) pot stabili legătura între amplitudinea $\psi$ (iniţială şi finală) şi parametrul $\beta$ dacă se înlocuieşte $s$ cu $l$, astfel:

$$\beta = F(\psi_L) - F(\psi_0) \tag{3.33, a}$$

pentru curbele fără inflexiune;

$$\beta = kF(\psi_L) - F(\psi_0) \tag{3.33, b}$$

pentru curbele cu inflexiune.

Rezultă:

$$F=(\psi)=F(\psi_L)\cdot F(\psi_0)\frac{s}{l} + F(\psi_0). \tag{3.34}$$

Folosind expresiile care determină forma liniei elastice în sistemul de coordonate mobile $x'y'$ se poate scrie:

$$dx' = \cos\zeta \cdot ds = \left(2\cos^2\frac{\zeta}{2} - 1\right)\cdot ds$$

$$dy' = \sin\zeta \cdot ds = 2\sin\frac{\zeta}{2}\cos\frac{\zeta}{2}\cdot ds. \tag{3.35}$$

Folosind relaţiile 3.29, *a*, 3.29, *b* şi integrînd de la capătul iniţial al barei pînă la un punct oarecare, se obţine:

$$\frac{x'-x_0}{l} = \frac{2}{\beta} E(\psi) - E(\psi_0) - \frac{s}{l}$$

$$\frac{y'-y'_0}{l} = \frac{2k}{\beta}(\cos\psi_0 - \cos\psi) \tag{3.36}$$

pentru cazul curbelor fără inflexiune;

$$\frac{x'-x'_0}{l}=\frac{2}{k\beta}E(\psi)-E(\psi_0)-\frac{2}{k^2}-1\frac{s}{l}$$

$$\frac{y'-y'_0}{l}=\frac{2}{k\beta}\left[\sqrt{1-k^2\sin^2\psi_0}-\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\right] \quad (3.37)$$

pentru curbele cu inflexiune, unde $E(\psi)$ este integrala eliptică de speţa a doua:

$$E(\psi)=\int_0^{\psi}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,.\,d\psi,\ \text{pentru } 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}. \quad (3.38)$$

Expresia momentului încovoietor (3.16) se poate exprima în funcţie de parametrii elastici prin relaţiile:

$$M=\frac{2k(\cos\psi-\cos\psi_0)}{\beta}Pl-\frac{E'I}{R} \quad (3.39,\ a)$$

pentru curbele fără inflexiune şi

$$M=\frac{2Pl}{k}\left[\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}-\sqrt{1\ k^2\sin\psi_0}-\frac{E'I}{R}\right] \quad (3.39\ b)$$

pentru curbele cu inflexiune.

Funcţia $\psi$, denumită amplitudinea eliptică, variază ca şi $\zeta$ în lungul axei lamelei încovoiate, de la $\psi_0$, la capătul din originea axelor, pînă la $\psi_L$, la capătul opus al lamelei. Mărimea $\psi_0$ se alege în funcţie de semnul curburii şi de semnul unghiului $\zeta_0$, astfel ca $\psi$ să varieze între limitele:

$$-\frac{\pi}{2}<\psi<+\infty.$$

Pentru determinarea intervalelor de variaţie $\psi_0$, E. P. Popov a stabilit tabela de orientare (tabela 3.3.), în funcţie de semnul curburii elastice în origine şi de intervalul de variaţie al lui $\zeta_0$.

În cazul cînd $\zeta_0=n\pi$, deci

$$\sin\frac{\zeta}{2}=\sin\psi_0=1,$$

expresiile momentelor devin:

$$M=\frac{2\,k\,Pl\cos\psi}{\beta}-\frac{E'I}{R}, \quad (3.40,\ a)$$



*Tabela 3.3*

**Intervale de variaţie a valorilor lui $\psi_0$**

| Semnul curburii liniei elastice | Interval de variaţie a unghiului $\zeta_0$ (semnul unghiului în punctul iniţial O al axei încovoiate) | Intervalul în care este cuprinsă valoarea $\psi_0$ | Ramura curbei periodice în care se află imaginea punctului O, conform fig. 3.11 |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{\rho_0}>0$ | $-\pi\leqslant\zeta_0<0$ | $-\frac{\pi}{2}\leqslant\psi_0<0$ | *NA* |
| | $0\leqslant\zeta_0<+\pi$ | $0\leqslant\psi_0<\frac{\pi}{2}$ | *AB* |
| $\frac{1}{\rho_0}<0$ | $+\pi\geqslant\zeta_0>0$ | $\frac{\pi}{2}\leqslant\psi_0<\pi$ | *BC* |
| | $0\geqslant\zeta_0>-\pi$ | $\pi\leqslant\psi_0<\frac{3\pi}{2}$ | *CD* |

pentru curbele cu puncte de inflexiune, şi

$$M=\frac{2Pl\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}{k\beta}-\frac{E'I}{R}, \quad (3.40,\ b)$$

pentru cele fără puncte de inflexiune.

Efortul unitar în secţiunea transversală este dat de relaţia

$$\sigma=\frac{M}{W}. \quad (3.41)$$

În urma deplasărilor mari ale lamelelor elastice, linia elastică a lamelei poate lua diferite forme care fac parte dintr-o familie de curbe periodice, care, pentru condiţii corespunzătoare, pot duce la o similitudine geometrică a barelor.

În fig. 3.11 sînt arătate formele curbelor periodice, care pot apărea în cazul poziţiilor de echilibru elastic la lamelele cu deplasări mari în funcţie de valorile lui $\alpha$, care rezultă din relaţiile modulului: $k=\sin\alpha\,(0°\leqslant\alpha\leqslant90°)$. Coordonatele $\xi$ şi $\eta$ sînt definite prin relaţiile (3.48).

Condiţiile de similitudine geometrică a liniilor de echilibru elastic al lamelelor constau în egalitatea mărimilor unghiurilor determinate de tangentele la două puncte ale curbelor şi în proporţionalitatea lungimilor între punctele corespunzătoare. Se poate considera că două curbe (fig. 3.12, *a* şi *b*) sînt asemenea, dacă lungimile arcelor $s_1$ şi $s_2$ sînt proporţionale cu razele de curbură $R_1$ şi $R_2$ în punctele corespunzătoare $B_1$ respectiv $B_2$ şi dacă unghiul făcut de tangentele în punctele $B_1$ şi

$C_1$ de pe o curbă egală cu unghiul format de tangentele în punctele corespunzătoare $B_2$ și $C_2$, de pe a doua curbă.

Afară de coeficienții de asemănare pur geometrici trebuie avut în vedere și coeficienții de asemănare la solicitarea de încovoiere. Astfel,

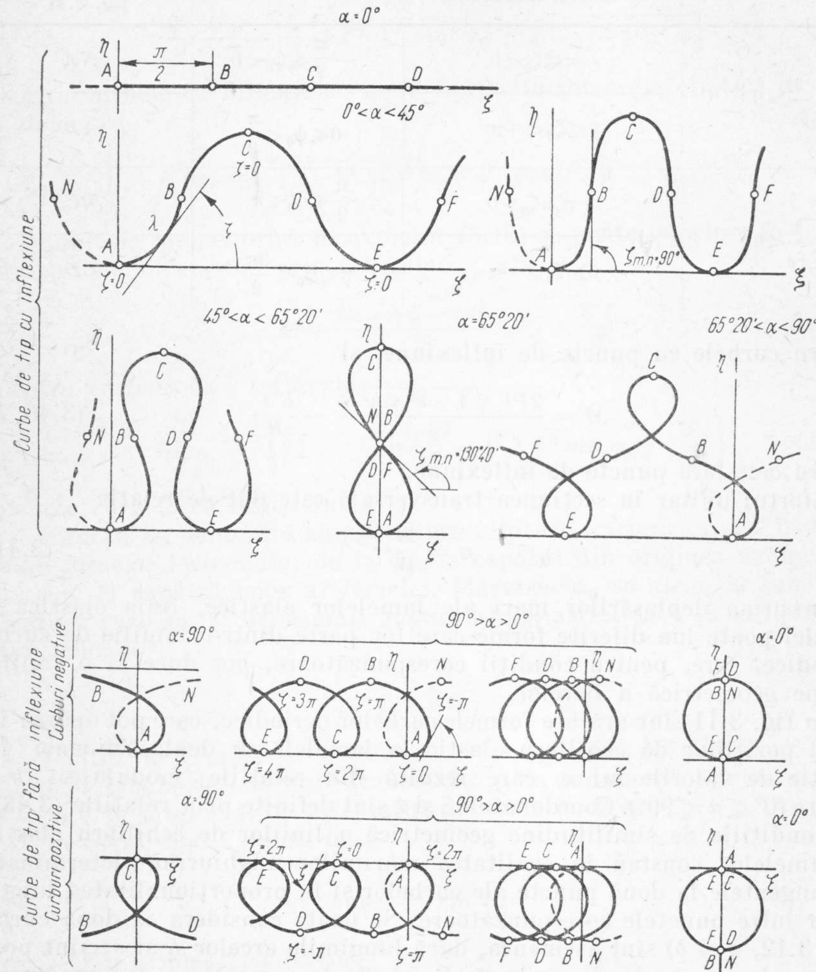



Fig. 3.11



trebuie avut în vedere coeficientul de asemănare denumit coeficientul de asemănare de forță dat de expresia

$$\beta = \sqrt{\frac{Pl^2}{E'I}}. \tag{3.42}$$

Acest coeficient nu depinde de poziția punctului de pe lamelă, ci este determinat ca o constantă pentru o porțiune de lamelă de lungime $l$,

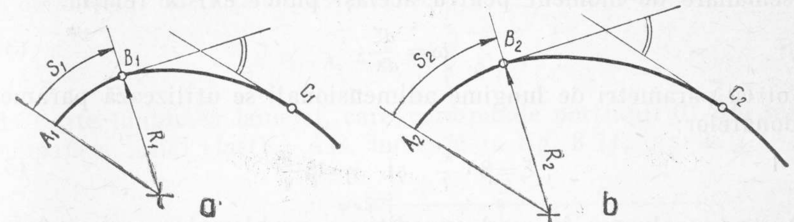



Fig. 3.12

de rigiditate $E'I$ și solicitat de o forță $P$. Un alt coeficient important este denumit coeficientul de asemănare de moment și este dat de expresia:

$$\omega = \frac{M + \frac{E'I}{R}}{\sqrt{PE'I}}, \tag{3.43}$$

în care $M$ este momentul încovoietor în secțiunea studiată, iar $R$ — raza de curbură a arcului înaintea deplasărilor elastice (în forma inițială). Valoarea acestui coeficient depinde de poziția punctului pe curba elastică.

În aplicații practice este necesară determinarea coeficientului de moment la capetele $O$ și $L$ ale arcului unde au valorile:

$$\omega_0 = \frac{M_0 + \frac{E'I}{R}}{\sqrt{PE'I}}; \text{ și } \omega_L = \frac{M_L + \frac{E'I}{R}}{\sqrt{PE'I}}. \tag{3.44}$$

Al treilea coeficient de asemănare utilizat este denumit coeficientul unghiular de asemănare, care este unghiul $\zeta$, format de direcția liniei de acțiune a forței $P$, aplicată în capătul inițial al lamelei și de tangenta la linia elastică de echilibru în punctul studiat. Valoarea acestui coeficient depinde de poziția punctului pe curba elastică.

Parametrul de lungime al unei porţiuni din curba elastică (lungimea unui arc) este dat de relaţia:

$$\lambda=\beta\frac{s}{l}. \tag{3.45}$$

Pentru porţiunea cuprinsă între capetele lamelei se poate scrie relaţia:

$$\beta=\lambda_L-\lambda_0. \tag{3.46}$$

Între curbura curbei elastice într-un punct oarecare şi coeficientul de asemănare de moment pentru acelaşi punct există relaţia:

$$\omega=\frac{d\zeta}{d\lambda}. \tag{3.47}$$

Tot ca parametri de lungime adimensionali se utilizează parametrii coordonatelor:

$$\xi=\beta\cdot\frac{x}{l} \quad \text{şi} \quad \eta=\beta\frac{y}{l} \tag{3.48}$$

Pentru rezolvarea în mod expeditiv a problemelor care se pun în practică, E. P. Popov a imaginat o metodă de lucru grafică în care, pe baza coeficienţilor de asemănare geometrică şi de încărcare, orice lamelă elastică, care se încadrează în categoria curbelor de bază, stabilite de Popov, poate fi comparată cu un segment al curbelor periodice, ale căror imagini sînt reprezentate în diagrama parametrilor elastici, şi din care — cunoscînd trei coeficienţi de asemănare oarecare — se pot determina ceilalţi coeficienţi (încă cinci).

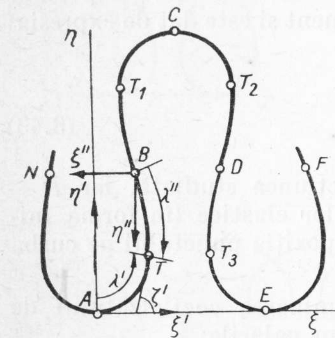



Fig. 3.13

Coeficienţii utilizaţi de Popov sînt: coordonatele adimensionale $\xi$ şi $\eta$, parametrul de lungime a arcului $\lambda$, curbura $1/\rho$ şi unghiul $\zeta$ făcut de axă cu tangenta la un punct al curbei, notate ca în fig. 3.13. Sistemul de notare depinde de modul de citire şi de alegere a sistemului de referinţă. Dacă citirea se face pornind de la originea $A$ a ramurii principale, parametrii elastici se notează cu $\xi'$, $\eta'$, $\lambda'$, $\omega'$, $\zeta'$. Dacă citirea se face de la capătul $B$ al ramurii principale se notează cu $\xi''$, $\eta''$, $\lambda''$. Deoarece parametrii elastici ai punctului $P$ se notează cu $\xi_{90}$, $\eta_{90}$, $\lambda_{90}$, se poate scrie:

$$\xi'=\xi_{90}-\xi''; \ \eta'=\eta_{90}-\eta''; \ \lambda'=\lambda_{90}-\lambda''. \tag{3.49}$$



Punctul $B$ este caracterizat prin amplitudinea eliptică $\psi=90°$.

Dacă într-un punct al curbei se cunosc parametrii elastici $\xi$, $\eta$, $\lambda$, $\omega$ şi $\zeta$, se pot deduce pentru punct coeficienţi de asemănare şi apoi se pot determina toate celelalte mărimi necesare dimensionării lamelei. În acest scop se pot folosi relaţiile:

$$x-x_0=\frac{l}{\beta}(\xi-\xi_0); \ y-y_0=\frac{l}{\beta}(\eta-\eta_0). \tag{3.50}$$

Coeficientul de forţă de asemănare $\beta$ este dat de relaţia:

$$\beta=\lambda_1-\lambda_0=l\sqrt{\frac{P}{E'I}}, \tag{3.51}$$

unde $l$ este lungimea lamelei, care corespunde porţiunii 01 din ramura principală a liniei elastice $AB$, indicată în fig. 3.14, *a* şi *b*.

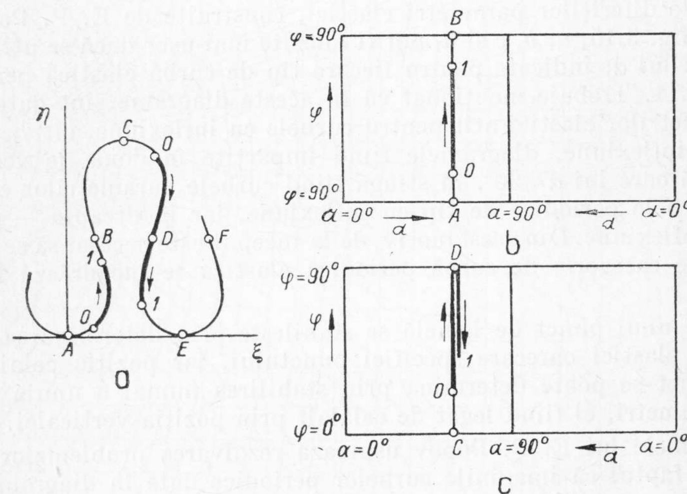



Fig. 3.14

În această figură ramura principală a curbei periodice în coordonate $\xi$, $\eta$ este redată în diagrama parametrilor $\alpha$, $\varphi$ de verticala $AB$, iar un segment oarecare *01* al curbei periodice — de segmentul corespunzător. Dacă acest segment *01* al curbei periodice corespunde la două ramuri principale, imaginea lui pe diagrama parametrilor $\alpha$, $\varphi$ va fi dublă *OD1* (fig. 3.14, *c*).

Punctul $A$ inițial al ramurii principale a curbei periodice elastice este determinat de coordonate $\varphi=0$, iar capătul final $B$— de valoarea $\varphi=90°$.

Expresia momentului încovoietor într-o secțiune a lamelei este:

$$M=\frac{E'I}{l}\left(\beta\omega-\frac{l}{R}\right). \qquad (3\ 52)$$

Pentru rezolvarea problemelor practice, E. P. Popov a construit într-un sistem de coordonate $\alpha$ și $\varphi$ o serie de curbe cu diferite valori ale parametrilor elastici: $\xi'$, $\eta'$, $\lambda'$, $\omega'$, $\zeta'$, $\xi''$, $\eta''$ și $\lambda''$. Aceste coordonate $\alpha$ și $\varphi$ se obțin din calcul pentru fiecare bară în parte, $\alpha$ fiind dat de relația $\alpha=\arcsin k$, unde $k$ este modulul integralei eliptice, iar $\varphi$ este amplitudinea eliptică ce rezultă din tabele și este legată de valoarea $\psi$ prin relația $\psi=n\ 180°\pm\varphi$, unde: $0°\leqslant\varphi\leqslant 90°$ și $n=0, 1, 2, \ldots$ etc. Diagramele diferiților parametri elastici, construite de E. P. Popov și redate în fig. 3.15, *a*, *b*, *c* și *d*, pot fi folosite mai ușor dacă se utilizează și valorile lui $\alpha$, indicate pentru fiecare tip de curbă elastică periodică din fig. 3.11. Trebuie menționat că în aceste diagrame sînt date valorile parametrilor elastici atît pentru curbele cu inflexiune, cît și pentru cele fără inflexiune, diagramele fiind împărțite în două de verticala corespunzătoare lui $\alpha=90°$, în stînga fiind curbele parametrilor elastici pentru curbele periodice de tip cu inflexiune, iar în dreapta — pentru cele fără inflexiune. Din acest motiv, de la început este necesar să se determine în ce categorie de curbă periodică elastică se încadrează lamela elastică.

Poziția unui punct de lamelă se stabilește prin determinarea a doi parametri elastici oarecare specifici punctului, iar poziția celui de-al doilea punct se poate determina prin stabilirea numai a unuia dintre acești parametri, el fiind legat de celălalt prin poziția verticalei.

Diagramele lui E. P. Popov ușurează rezolvarea problemelor practice, prin faptul că imaginile curbelor periodice date în diagramă sînt asemenea cu cele ale barelor încovoiate. Folosind diagramele, se determină cei opt parametri care permit apoi efectuarea ușoară a calculelor cu formulele indicate anterior.

Pentru a ușura calculele, E. P. Popov a stabilit și o tabelă cu formule de trecere a parametrilor elastici de la ramura principală la celelalte ramuri, care permit determinarea mărimilor adimensionale $\xi$, $\eta$, $\lambda$ și $\omega$, corespunzătoare ramurii respective. Tabela cu formulele de trecere (tabela 3.4) se folosește în legătură cu curbele și notațiile prezentate în fig. 3.14.

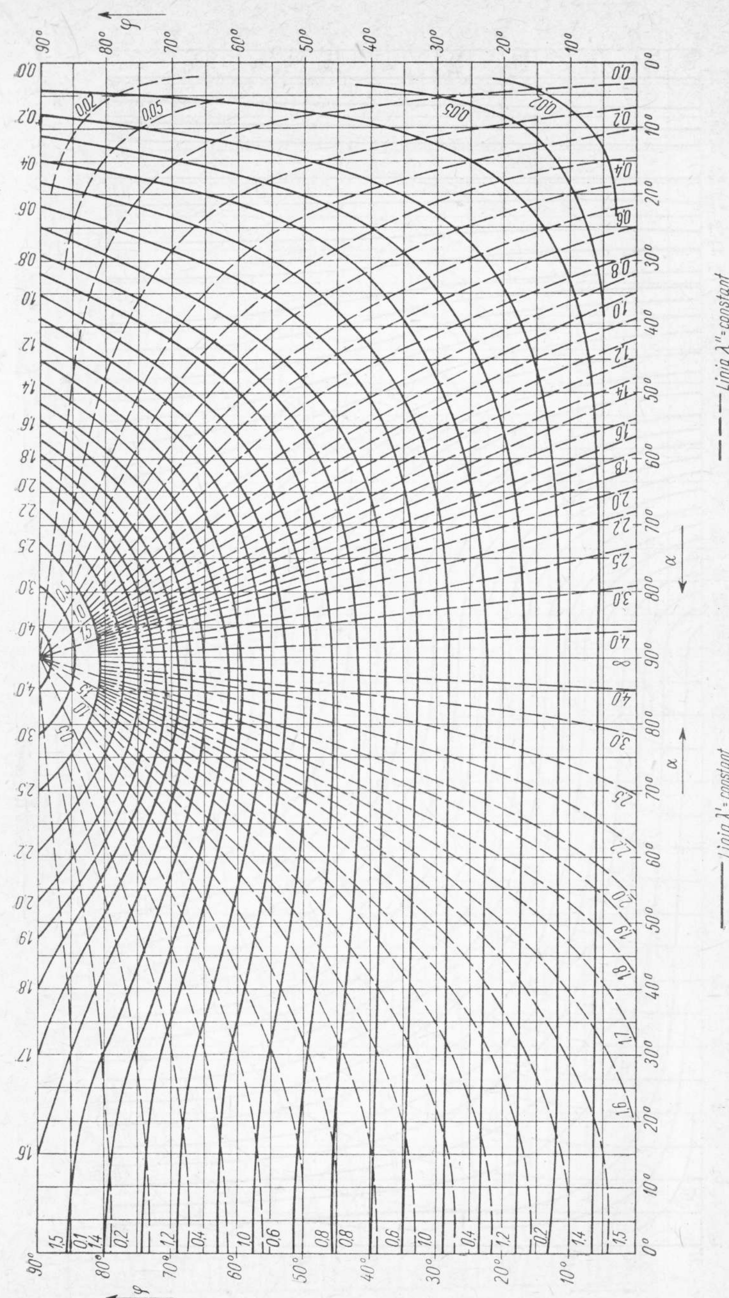



Fig. 3.15, a

## 3.2. Arcuri în foi suprapuse

### 3.2.1. Generalități

Pentru obținerea unui element elastic cu un gabarit redus capabil să preia sarcini mai mari decît arcurile lamelare simple se utilizează arcuri în foi multiple.

În principiu, un arc în foi multiple este un element elastic compus din mai multe elemente elastice, lamele suprapuse, strînse între ele printr-una sau mai multe brățări de strîngere, denumite bride sau legături de arc, astfel că fiecare lamelă în parte lucrează în același timp cu celelalte, preluînd partea ce-i revine din sarcina care acționează asupra ansamblului.

Datorită capacității acestor arcuri de a amortiza trepidațiile și șocurile, ele au o utilizare foarte largă în suspensia vehiculelor (vagoane, locomotive, vehicule rutiere, tractoare etc.), formînd legătura elastică între cutia vehiculului și elementul de rulare (roată, osie și lagăr). Utilizarea arcurilor în foi suprapuse ca elemente amortizoare este des întîlnită și la diferite mașini sau mecanisme ca, de exemplu, la unele ciocane mecanice de forjă, la tampoane de ascensor etc.

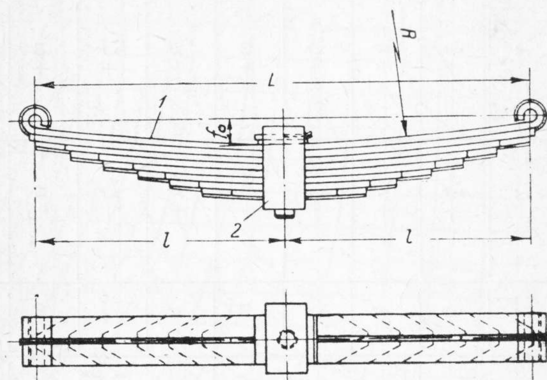



Fig. 3.16

În fig. 3.16 este reprezentat un arc simplu în foi suprapuse cu două brațe egale, care este cazul cel mai răspîndit.



Un astfel de arc este format dintr-un număr de lame (foi) *1* care de cele mai multe ori au aceeași secțiune, strîns legate prin brida *2*, astfel că foile se consideră încastrate la mijlocul lor. La arcul cu foi suprapuse se deosebesc trei feluri de foi și anume: foaie principală, foaie principală de întărire și foi secundare. Foaia principală de lungime egală cu deschiderea arcului este prevăzută cu ochiuri de prindere. Foaia principală de întărire are lungimea egală cu cea a foii principale și este montată sub aceasta. Foile secundare sînt mai scurte, lungimea fiecărei foi secundare fiind mai scurtă decît lungimea celei care se află imediat deasupra ei. Arcul indicat în fig. 3.16 are foile strînse cu o singură legătură, care se mai numește și bridă principală. Există și arcuri la care foile se leagă prin mai multe legături. Acestea au denumirea de legături sau bride secundare. Foile principale sînt prevăzute la capete cu un sistem de prindere sau de rezemare, astfel că arcul este de regulă acționat de trei forțe; două care apar la capete ca forțe de legătură și o forță care acționează la mijloc (fig. 3.17).

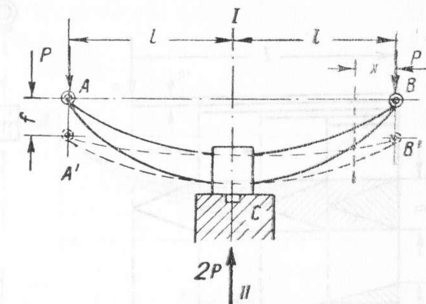



Fig. 3.17

Din figură rezultă că fiecare braț al arcului este solicitat de un moment de încovoiere.

Pentru o bună utilizare a materialului din care se execută arcul se urmărește ca foile să fie astfel dimensionate, încît arcul să aibă forma unui solid de egală rezistență. Arcul din fig. 3.17, reprezentat schematic, este o bară de secțiune variabilă care echivalează cu un solid de egală rezistență. Forma ideală a unui arc cu două brațe ar fi un arc constituit dintr-o singură foaie de oțel în formă de romb, astfel că fiecare dintre cele două brațe ar fi de fapt un arc lamelar triunghiular care lucrează ca un solid de egală rezistență (fig. 3.18). Deoarece folosirea unei asemenea lamele ar duce la o formă cu totul neconvenabilă și necorespunzătoare scopului, acest arc se înlocuiește cu un arc echivalent, obținut prin tăierea lamei romboidale în fîșii simetrice de lățimi $\frac{b}{2}$ ca în figură și apoi prin unirea fîșiilor simetrice se obțin lamele de aceeași lățime $b$ care, suprapuse, duc la forma arcului în foi suprapuse. Deoarece capetele foilor astfel obținute au formă ascuțită triunghiulară,

curbarea capetelor foii principale pentru formarea ochiurilor de legătură nu ar putea fi realizată. De asemenea, forma ascuțită a capetelor la foile secundare contribuie la degradarea foilor superioare de care se sprijină. Pentru eliminarea acestor neajunsuri se utilizează arcuri în

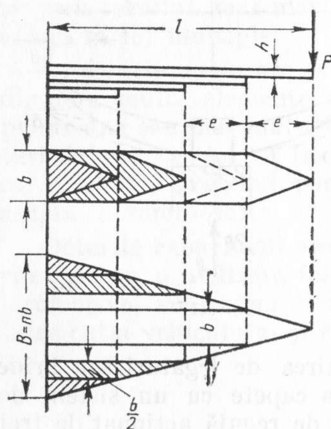



Fig. 3.18

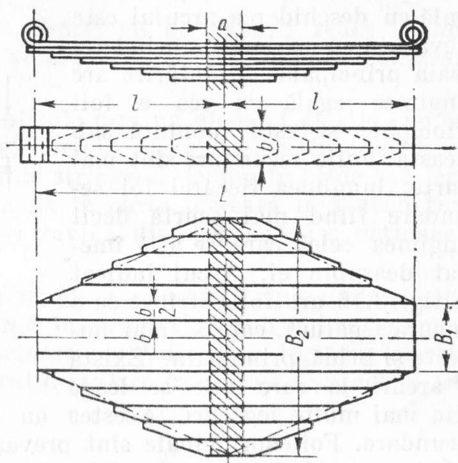



Fig. 3.19

foi cu capul trapezoidal, avînd baza mare $B_2=nb$ și baza mică $B_1=mb$ (fig. 3.19), $n$ fiind numărul total al foilor, iar $m$ numărul foilor principale.

Se întîlnesc însă și cazuri cînd în afara capului trapezoidal, forma capetelor lamelelor poate fi triunghiulară, dreaptă, semicirculară, semieliptică sau parabolică. Cea mai răspîndită formă, afară de cea trapezoidală și de cea dreaptă, este cea parabolică (fig. 3.20).

La unele construcții, pentru obținerea unei caracteristici a arcului mai puțin rigide se subțiază grosimea foilor la capetele arcului, ca în fig. 3.20.

La diferite construcții de mașini și de material rulant sau rutier se întîlnesc foarte multe variante constructive ale arcurilor în foi, care pot diferi între ele fie prin numărul de foi de întărire, fie prin forma capătului foii.

Alte variante constructive se obțin prin dispunerea, din construcție, în mod neegal a brațelor arcurilor (fig. 3.21) sau pur și simplu din con-



struirea arcului cu un singur braț (fig. 3.22). De asemenea, se întîlnesc arcuri la care sistemul de rezemare sau de solicitare la capete este diferit (articulat la un capăt și simplu rezemat la celălalt) (fig. 3.23).

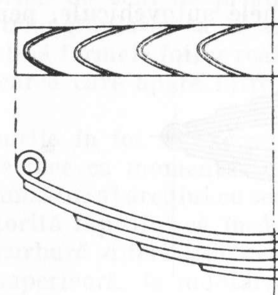


Fig. 3.20

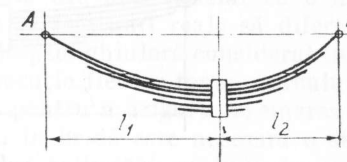



Fig. 3.21

De asemenea, în foarte multe cazuri, se întîlnesc arcuri de același fel grupate în serie sau în paralel. Arcurile grupate în serie se numesc arcuri duble în foi sau arcuri în foi închise eliptice (fig. 3.24).

În majoritatea cazurilor, caracteristica arcurilor în foi este liniară, rigiditatea lor fiind constantă.

În anumite situații trebuie ca arcul să aibă o rigiditate progresivă, ceea ce se realizează fie prin formarea arcului prin foi de rază de curbură diferită — fig. 3.25 — fie prin sprijinirea capetelor arcului pe suprafețe rotunde, astfel ca deschiderea arcului reală să fie variabilă (fig. 3.26).

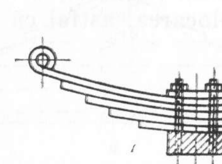


Fig. 3.22

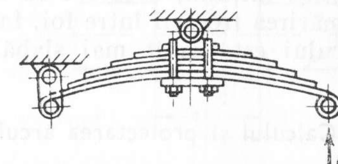



Fig. 3.23

Arcurile în foi multiple sînt utilizate în mod deosebit la vehicule și la alte tipuri de mașini datorită următoarelor avantaje:

— au lățimea mică în raport de lungime, ceea ce permite așezarea lor paralel cu axa vehiculului;

— frecările interioare care se produc între foi contribuie la realizarea unei bune amortizări a șocurilor și la obținerea unei rigidități convenabile a arcului;

— prin gruparea în serie sau în paralel a mai multor arcuri în foi se pot realiza caracteristici convenabile; la unele autovehicule, pentru a realiza o caracteristică convenabilă, se grupează arcurile în foi cu arcuri-bare de torsiune.

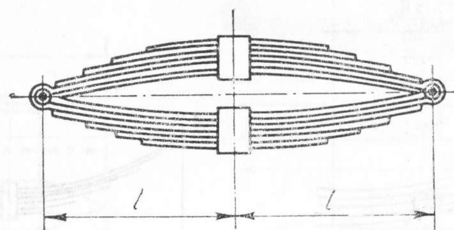



Fig. 3.24

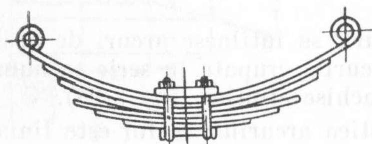


Fig. 3.25

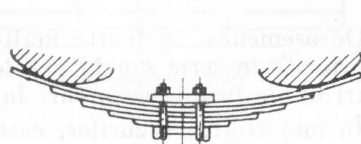


Fig. 3.26

Arcurile în foi necesită o oarecare întreținere pentru a-și păstra caracteristica inițială, deoarece cu timpul acestea ruginesc, ceea ce are ca efect mărirea frecării între foi, favorizînd blocarea, astfel că amortizarea arcului este mult mai slabă.

### 3.2.2. Calculul și proiectarea arcului în foi

Relațiile de calcul care se stabilesc pentru proiectarea arcurilor pornesc de la dimensionarea unui arc ideal teoretic și apoi, prin corectarea lor în mod corespunzător, se adaptează la arcul real care se execută practic.

Arcul în foi multiple ideal se calculează ca un solid de egală rezistență prin echivalarea lui cu un arc lamelar triunghiular sau cu un arc lamelar trapezoidal.



Arcul în foi real se deosebește de cel ideal din următoarele cauze:

capetele foilor de la arcurile reale diferă de forma triunghiulară care rezultă la formarea arcului ideal;

capătul la foaia principală reală, pentru a putea fi formată la cald sub formă de ochi de prindere, se execută sub formă dreptunghiulară și nu triunghiulară, ca la arcul ideal; în fig. 3.27 sînt reprezentate cu linie plină formele foilor reale și punctat, formele celor ale arcului ideal;

frecarea care apare între foile arcului modifică comportarea arcului real;

arcurile în foi se execută de regulă din oțel canelat cu o nervură, ceea ce face ca momentul de inerție al secțiunii reale să difere de cel corespunzător al arcului cu secțiunea dreptunghiulară considerat în calcul;

datorită faptului că încă de la execuție fiecare foaie a arcului în foi are o curbură diferită de cea vecină, pentru a asigura rezemarea foii pe foaia superioară, la montarea arcului în bridă este necesară o strîngere inițială care provoacă în foile arcului solicitări suplimentare;

secțiunea de încastrare nu poate fi considerată nici la mijlocul și nici la marginea bridei; după normele de calcul date de GOST 1425-48, secțiunea de încastrare $I-I$ (fig. 3.28) se ia la distanța $\frac{a}{6}$ de la mijlocul arcului, unde $a$ este lungimea legăturii (bridei) de strîngere;

ultima foaie, cea mai scurtă la arcul real, este o foaie dreptunghiulară sau trapezoidală care are totuși o porțiune dreptunghiulară (cota $c$, fig. 3.28), spre deosebire de ultima foaie care rezultă la arcul ideal ca dublu triunghiulară. Această diferență modifică, desigur, caracteristica și implicit relațiile de calcul pentru arcul real.

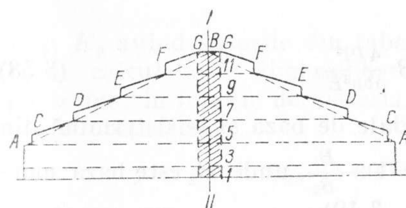



Fig. 3.27

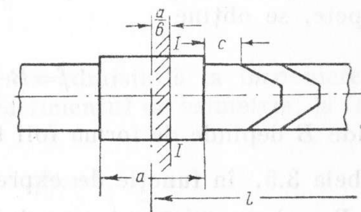



Fig. 3.28

Relația de calcul pentru arcul ideal format dintr-o lamelă dublu triunghiulară sau romboidală (ca în fig. 3.18), solicitat la încovoiere, este următoarea:

$$\sigma_{max} = \frac{Pl}{W}. \tag{3.53}$$

Ştiind că $W=\frac{nbh^2}{6}$, unde $n$ este numărul de foi;

$b$ — lăţimea unei foi;

$h$ — grosimea unei foi;

rezultă

$$\sigma_{max}=\frac{6Pl}{nbh^2};\ P=\frac{nbh^2\sigma_a}{6l};\ n=\frac{6Pl}{bh^2\sigma_a} \tag{3.54}$$

unde $\sigma_a$ este efortul unitar admisibil.

$$\text{Săgeata } f=\frac{6Pl^3}{nbh^3E} \tag{3.55}$$

(săgeata iniţială a arcului considerîndu-se nulă), iar lucrul mecanic de deformare

$$L=\frac{1}{6}V\frac{\sigma^2}{E}=\frac{6P^2l^3}{nbh^3E}. \tag{3.56}$$

Se observă că indicele de utilizare volumetric este $\frac{1}{6}$

Relaţiile de calcul pentru arcul ideal, format pe baza unei lamele trapezoidale (v. fig. 3.19), sînt:

$$\sigma_{max}=\frac{6Pl}{B_2\cdot h^2}=\frac{6Pl}{nbh^2}, \tag{3.57}$$

unde $B_2=nb$.

Comparînd săgeata obţinută cu cea a unei grinzi simplu rezemate la capete, se obţine

$$f=B\frac{l^3P}{3EI}=B\frac{4Pl^3}{nbh^3E}, \tag{3.58}$$

unde $B$ depinde de forma foii trapezoidale de bază şi se determină din tabela 3.5, în funcţie de expresia $K_0=1-\frac{B_1}{B_2}$, unde $B_2$ este baza mare şi $B_1$ — baza mică a trapezului (v. fig. 3.19).

*Tabela 3.5*

**Valorile coeficientului $B$ pentru arcul lamelar trapezoidal în funcţie de $K_0$.**

| $K_0$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$ | 1,00 | 1,025 | 1,054 | 1,085 | 1,121 | 1,160 | 1,202 | 1,250 | 1,315 | 1,390 |



Lucrul mecanic de deformare

$$L=\frac{2Pf}{2}=Pf. \tag{3.59}$$

Din 3.57 se deduce

$$P=\frac{nbh^2\sigma}{6l}, \tag{3.60}$$

deci:

$$L=\frac{nbh^2\sigma}{6l}\cdot\frac{2}{3}\frac{l^2\sigma}{hE}.B$$

sau

$$L=\frac{nbhl}{9}\cdot\frac{\sigma^2}{E}B. \tag{3.61}$$

$$\text{Ştiind că } V=2nbhl\left(1-\frac{K_0}{2}\right), \tag{3.62}$$

se obţine:

$$L=\frac{1}{18}\frac{B}{1-\frac{K_0}{2}}\cdot V\cdot\frac{\sigma^2}{E}. \tag{3.63}$$

În acest caz, coeficientul de utilizare volumetrică este

$$\eta=\frac{1}{18}\cdot\frac{B}{1-\frac{K_0}{2}}, \tag{3.64}$$

$B$ şi $K_0$ avînd valorile din tabela 3.5.

În calculele de dimensionare rezistenţa admisibilă la încovoiere se poate lua, în funcţie de material şi de coeficientul de asimetrie, la frecvenţe obişnuite

$$\sigma_{ai}=6\ 000-10\ 000\ \text{kgf/cm}^2.$$

În relaţiile precedente s-a considerat că arcul nedeformat are forma unei bare drepte de secţiune variabilă. În realitate, arcului i se imprimă o formă iniţială, astfel că în calcul este necesar să se ţină seamă şi de săgeata iniţială, deoarece valoarea momentului încovoietor se schimbă. În fig. 3.29 este reprezentat un astfel de arc care are o săgeată iniţială $f_0$, iar capetele acestuia sînt articulate prin ochiurile de arc cu eclise speciale, a căror axă este înclinată cu unghiul $\alpha$ faţă de verticală.

În acest caz, forța $P$ care acționează vertical la capătul arcului este însoțită de o componentă orizontală de mărime $P \cdot \mathrm{tg}\, \alpha$, astfel că secțiunea de încastrare considerată la mijlocul bridei de strîngere este solicitată de două momente încovoietoare, și anume:

$M_1 = Pl$, datorită componentei verticale de la capătul arcului;

$M_2 = f_0 P \cdot \mathrm{tg}\, \alpha$, datorită componentei orizontale.

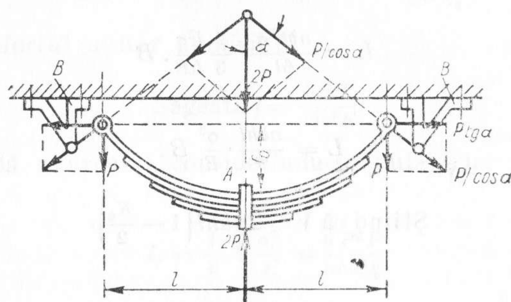



Fig. 3.29

Momentul încovoietor rezultant,

$$M_i = P(l + f_0\, \mathrm{tg}\, \alpha) \quad (3.65)$$

va produce efortul unitar

$$\sigma_i = \frac{M_i}{W} = \frac{6P\,(l + f_0 \mathrm{tg}\, \alpha)}{nbh^2}, \quad (3.66)$$

relația din care rezultă numărul $n$ de foi necesare.

Componenta orizontală va produce în foaia principală și un efort de întindere $\sigma_t = \frac{P \mathrm{tg}\, \alpha}{bn}$, astfel că efortul unitar rezultant în foaia principală este dat de relația

$$\sigma_{max} = \frac{P}{bh}\left[\mathrm{tg}\, \alpha + \frac{6(l + f_0 \mathrm{tg} \alpha)}{nh}\right]. \quad (3.67)$$

Această relație este aproximativă, deoarece, în realitate, sub sarcină, arcul se aplatizează și săgeata sa se modifică, devenind $f_1$ (fig. 3.30), așa încît săgeata de lucru a sarcinii $f = f_0 - f_1$.



Acestei aplatizări îi corespunde și o modificare a unghiului de înclinare a eclisei, $\alpha$, care devine $\alpha_1$, astfel că $f_1 = l\, \mathrm{tg} \frac{\alpha_1}{2}$.

În acest caz relațiile pentru efortul unitar și pentru săgeată, în cazul asimilării arcului respectiv cu un arc lamelar dublu triunghiular, devin:

$$\sigma_i = \frac{6P(l + f_1 \mathrm{tg}\, \alpha_1)}{bh^2 n}; \quad (3.68)$$

$$f = \frac{l^2}{h} \cdot \frac{\sigma_i}{E} = \frac{6Pl^2(l + f_1 \mathrm{tg}\, \alpha_1)}{Ebh^3 n}. \quad (3.69)$$

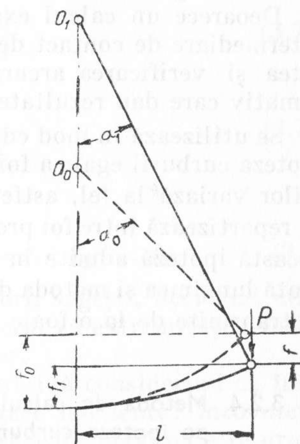



Fig. 3.30

În cazul arcului preformat, bazat pe ideea formării „dublu trapezoidală" a foii, relațiile acestea devin:

$$f = B \cdot \frac{4Pl^3}{nbh^3 E}\left(1 + \frac{f_1}{l}\, \mathrm{tg}\, \alpha_1\right) \quad (3.70)$$

și

$$\sigma_i = \frac{6P(l + f_1 \mathrm{tg}\, \alpha_1)}{nbh^2}. \quad (3.71)$$

### 3.2.3. Calculul arcului real în foi

La arcul real în foi apar unele deosebiri de formă și de solicitare care necesită dirijarea calculului în mod corespunzător, așa cum s-a arătat mai înainte (paragraful 3.2.1).

Pe lîngă cele arătate, trebuie precizat că la arcul real, foile de arc au în stare liberă curburi diferite, iar la asamblare sînt strînse între ele într-o bridă, cu ajutorul unui bulon central, astfel că, datorită acestui lucru, în foile arcului apar tensiuni încă înainte de încărcarea sa. Aceste tensiuni, denumite tensiuni de asamblare, se suprapun tensiunilor care apar în foile arcului datorită sarcinii. Astfel, în foile scurte tensiunile de asamblare se adună la tensiunile provocate de sarcină, iar în cele lungi se scad din acestea. Diferiți autori au reușit să demonstreze că, la arcul real, sarcina se transmite între foile arcului numai prin forțe concentrate în anumite puncte, așa încît un punct de sprijin se află totdeauna la capătul foii, iar al doilea se află în imediata

apropiere de locul de încastrare, la o distanță aproximativă $x \approx 0{,}055\ l$ din lungimea foii.

În unele norme de calcul se consideră că punctul de sprijin se află chiar în secțiunea de încastrare, la distanța $\frac{a}{6}$ de la mijlocul arcului, $a$ fiind lungimea bridei de strîngere (GOST 1425-48).

Deoarece un calcul exact, în care să se țină seamă și de punctele intermediare de contact de lîngă bridă, este foarte complicat, la proprietatea și verificarea arcurilor în foi se folosesc metode de calcul aproximativ care dau rezultate destul de apropiate de cele exacte.

Se utilizează în mod curent metoda de calcul aproximativ care admite ipoteza curburii egale a foilor, adică într-o secțiune dată curbură tuturor foilor variază la fel, astfel că momentul încovoietor produs de sarcină se repartizează între foi proporțional cu momentele de inerție respective; această ipoteză admite în fond că foile se află în contact, între ele, pe toată lungimea și metoda de calcul aproximativ admite ipoteza că sarcina se transmite de la o foaie la alta numai prin extremitățile foilor.

### 3.2.4. Metoda de calcul aproximativ bazată pe ipoteza curburii egale a foilor

Această metodă este cea mai utilizată, deoarece rezultatele care se obțin sînt cele mai apropiate de realitate, iar calculul este simplu și foarte expeditiv. Calculul se apropie în acest caz de calculul unei grinzi cu secțiune variabilă, adică al unui solid de egală rezistență, astfel că momentul de inerție al unei secțiuni oarecare este egal cu suma momentelor de inerție ale foilor arcului în aceeași secțiune.
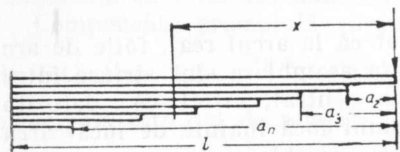


Fig. 3.31

Pentru a determina săgeata unui sfert de arc (fig. 3.31) se poate folosi, pe baza metodei lui Mohr, relația

$$f=\int_0^l \frac{M \cdot M'}{EY}\,dx, \qquad (3.72)$$

în care $M'$ este momentul încovoietor într-o secțiune oarecare $x$, dat de o forță-unitate: $M'=1 \cdot x$; iar $M$ – momentul încovoietor dat de forța $P$ în aceeași secțiune: $M=Px$.



Notînd cu $a_2$, $a_3 \ldots a_n$ distanțele capetelor foilor față de capătul foii principale în care se aplică sarcina $P$, expresia săgeții arcului este următoarea:

$$f=\frac{P}{E}\int_0^l \frac{x^2dx}{Y}=\frac{P}{3E}\left[\frac{a_2^3}{Y_1}+\frac{a_2^3-a_3^3}{Y_2}+\frac{a_4^3-a_3^3}{Y_3}+\right.$$

$$\left.+\frac{a_n^3-a_{n-1}^3}{Y_{n-1}}+\frac{l^3-a_n}{Y_n}\right] \qquad (3.73)$$

sau

$$f=\frac{P}{3E}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}^3-a_i^3}{Y_i}; \qquad (3.74)$$

unde

$$a_{n+1}=l$$

$$Y_1=I_1;\ Y_2=I_1+I_2;\ \ldots\ldots;\ Y_n=I_1+I_2+\ldots I_n. \qquad (3.75$$

Această relație dă valoarea minimă a valorii săgeții, deci mai mică decît cea reală, deoarece în calcul s-a considerat că extremitățile foilor se încovoaie la fel ca și foile de deasupra lor.

Valoarea maximă a săgeții arcului se determină considerînd că încovoierea extremităților foilor este nulă, deoarece momentul încovoietor la extremitatea foii este nul. Relația pentru săgeata maximă este următoarea:

$$f=\frac{P}{3E}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_{i+2}^3-a_{i+1}^3}{Y_i}+\frac{a_2^3}{Y_1}\right]. \qquad (3.76)$$

Pentru un calcul practic se folosește relația care dă valoarea medie a săgeții

$$f=\alpha\frac{P}{3E}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}^3-a_i^3}{Y_i}, \qquad (3.77)$$

în care

$$\alpha=1{,}15\ldots1{,}21.$$

Efortul unitar într-o secțiune a unei foi de arc se determină considerînd că momentul încovoietor se împarte între foile arcului proporțional cu momentele lor de inerție.

$$\sigma_i=\frac{M_x}{Wn}\cdot\frac{I_n}{Yn}. \qquad (3.78)$$

Pentru determinarea săgeţilor arcului asamblat se consideră că în stare liberă foile arcului au forma unor arce de cerc, cu razele de curbură $R_1$, $R_2$, $R_3 ... R_n$, după numărul de ordine al foii. Pentru a putea desfăşura calculul se foloseşte noţiunea de rază de curbură a foilor, raportate la prima foaie, conform relaţiilor:

$$R'_2 = R_2 - h_1;$$
$$R'_3 = R_3 - (h_1 + h_2); \tag{3.79}$$
$$R'_4 = R_4 - (h_1 + h_2 + h_3),$$

$h_1$, $h_2$, $h_3 ... h_n$ fiind grosimile foilor.

După asamblare, toate foile primesc aceeaşi curbură, datorită faptului că fiecare foaie este supusă unui moment de încovoiere. Dacă într-o porţiune a arcului asamblat raza de curbură a primei foi devine $R_0$, variaţia curburii primei foi pe porţiunea dată este

$$\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}, \tag{3.80}$$

iar pentru celelalte foi

$$\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R'_2}; \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R'_3}; \ldots \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R'_n}. \tag{3.81}$$

Deoarece suma momentelor de încovoiere din toate foile arcului, în secţiunea respectivă a arcului strîns trebuie să fie nulă, rezultă:

$$\sum_1^k M = EI_1\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right) + EI_2\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R'_2}\right) +$$
$$+ EI_3\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R'_3}\right) + EI_k\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R'_k}\right) = 0, \tag{3.82}$$

de unde

$$\frac{1}{R_0} = \frac{\sum_1^k \frac{I_n}{R'_n}}{\sum_1^k I_n}, \tag{3.83}$$

unde 1, 2...$k$ reprezintă foile de arc care alcătuiesc secţiunea respectivă. Cunoscînd valoarea expresiei $\frac{1}{R_0}$, se pot determina momentele încovoietoare din fiecare foaie şi evident şi efortul unitar respectiv, cu ajutorul relaţiilor:



$$M_1 = EI_1\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right); \; M_2 = EI_2\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R'_2}\right) .. M_k = EI_k\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R'_k}\right) ..., \tag{3.84}$$

iar eforturile unitare

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{W_1}; \; \sigma_2 = \frac{M_2}{W_2} \ldots \sigma_k = \frac{M_k}{W_k}. \tag{3.85}$$

Pentru a determina variaţia totală a razei de curbură a foii principale, în urma asamblării se observă că raza de curbură a foii principale se modifică de la valoarea $R_1$ pînă la valoarea $R_{0n}$, determinată cu relaţia precedentă, pentru fiecare porţiune care apare o dată cu o nouă foaie a arcului. Variaţia totală a săgeţii primei foi rezultă din relaţia

$$f_0 - f_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{R_{0i}} - \frac{1}{R_1}\right)(a_{i+1}^2 - a_i^2) \tag{3.86}$$

sau considerînd $R_1$ constantă pentru toate porţiunile (cazul foii libere în formă de arc de cerc)

$$f_0 = f_1 - \frac{l^2}{2R_1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1}^2 - a_i^2}{R_{0i}}, \tag{3.87}$$

unde:

$f_0$ este săgeata foii principale în stare liberă;
$l$ — lungimea;
$R_1$ — raza de curbură a foii principale în stare liberă;
$R_{0n}$ — raza de curbură a porţiunii din arcul asamblat, cuprinsă între distanţele $a_n$ şi $a_{n+1}$ de capătul primei foi.

Ca observaţie trebuie reţinut că prin această metodă de calcul, valorile eforturilor unitare în ultimele două foi mai scurte sînt mai mici decît în realitate.

### 3.2.5. Calculul arcurilor în foi pe baza ipotezei transmiterii forţelor prin extremităţi

Pentru un calcul aproximativ, suficient de apropiat de realitate, se consideră o jumătate de arc strînsă în brida de legătură, transmiterea încărcării de la o foaie la alta realizîndu-se numai prin capătul foii.

Pe baza acestei ipoteze, fiecare foaie se poate considera ca o grindă rectilinie, încastrată la un capăt (în mijlocul bridei) şi încărcată cu două forţe concentrate: forţa de interacţiune cu foaie de deasupra şi forţa de interacţiune cu foaia de dedesubt.

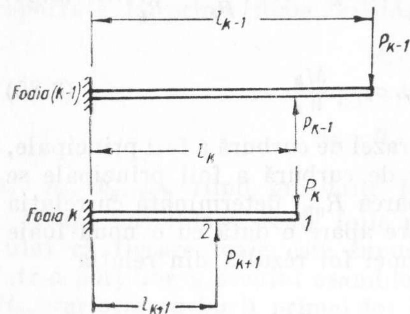


Fig. 3.32

Dacă se consideră două foi ale arcului de ordinul $(k-1)$ şi $k$, fiecare foaie este solicitată ca în fig. 3.32; şi dacă se notează cu *1* şi *2* punctele de aplicaţie ale forţelor concentrate în capătul foii, respectiv în dreptul capătului foii de dedesubt, săgeata punctelor *1* şi *2* pentru foaie se poate scrie sub forma:

$$y_1^{(k)} = P_k\,\delta_{11}^{(k)} - P_{k+1}\delta_{12}^{(k)}$$

$$y_2^{(k)} = P_k\,\delta_{12}^{(k)} - P_{k+1}\delta_{22}^{(k)} \qquad (3.88)$$

unde: $\delta_{11}^{(k)}$ este săgeata punctului *1* al foii $k$, produsă de o forţă egală cu unitatea aplicată în punctul *1* al foii de ordinul $k$;

$\delta_{12}^{(k)}$ — săgeata punctului *1* al foii $k$, produsă de o forţă egală cu unitatea aplicată în punctul *2* al foii de ordinul $k$;

$\delta_{22}^{(k)}$ — săgeata punctului 2 al foii $k$, produsă de o forţă egală cu unitatea aplicată în punctul *2* al foii de ordinul $k$;

Săgeţile $\delta$ sînt date de relaţiile:

$$\delta_{11}^{(k)} = \frac{1}{3EI_k}\,l_{12}^{(k)} + K(l_k - l_{k+1})^3; \qquad (3.89)$$

$$\delta_{12}^{(k)} = \frac{1}{6EI_k}\,l_{k+1}^2\,(3l_k - l_{k+1});$$

$$\delta_{22}^{(k)} = \frac{l_{k+1}}{3EI_k}, \qquad (3.89)$$

în care $I_k$ este momentul de inerţie al secţiunii transversale.

$K$ — un coeficient care ţine seamă de forma capătului foii, modificat fie prin subţierea sa, fie prin retezarea sa; în cazul foii nesubţiate şi neretezate la capăt, $K=0$; în tabela 3.6 se dau valorile coeficientului $K$ pentru diferite forme uzuale ale capetelor foilor de arc;

$l_k$, $l_{k+1}$ sînt lunigmile foilor $k$ şi $k+1$ măsurate de la secţiunea de încastrare pînă la capătul foii.

*Tabela 3.6*

**Valorile coeficientului K pentru diferite forme ale capetelor foilor de arc**

| Forma capătului foii | Relaţia de calcul | Diagrama |
|---|---|---|
| (schiţă: $l_k$, $l_{k+1}$, $a$, $b$, $b_1$) | $K^{[k]} = \frac{\alpha^3}{2}\cdot\frac{6\beta^3 \ln\frac{1}{\beta}+(1-\beta)(1-5\beta-2\beta^2)}{(1-\beta^3)}$; $\alpha=\frac{a}{l_k-l_{k+1}}$; $\beta=\frac{b_1}{b}$ | $K$: 0,2; 0,4; $b_1/b$: 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; $\alpha=1$; 0,9; $\alpha=0,8$ |
| (schiţă: $l_k$, $l_{k+1}$, $a$, $h$, $h_1$) | $K^{[k]} = \frac{\alpha^3}{2}\cdot\frac{6\ln\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta}(1-\beta)(11-7\beta+2\beta^2)}{(1-\beta)^3}$; $\alpha=\frac{a}{l_k-l_{k+1}}$; $\beta=\frac{h_1}{h}$ | $K$: 0,2; 0,4; 0,6; $h_1/h$: 0,3; 0,5; 0,7; 0,9; $\alpha=1$; 0,9; 0,8; $\alpha=0,7$ |
| (schiţă: $h$, $h_1$, $b$, $b_1$) | $K=\alpha^3\frac{1-\beta}{\beta}$; $\alpha=\frac{a}{l_k-l_{k+1}}$; $\beta=\frac{h_1}{h}=\frac{b_1}{b}$ | $K$: 0,2; 0,4; 0,6; $h_1/h$: 0,3; 0,5; 0,7; 0,9; $\alpha=1$; 0,9; 0,8; 0,7; $\alpha=0,6$ |

Deoarece săgeata capătului *1* al foii $k$ este egală cu săgeata punctului de sprijin pe foaia superioară $(k-1)$ notat cu *2* se poate scrie:

$$y_1^{(k)} = y_2^{(k-1)} = P_k \delta_{11}^{(k)} - P_{k+1} \cdot \delta_{12}^{(k)} = P_{k-1} \cdot \delta_{12}^{(k-1)} - P_k \cdot \delta_{22}^{(k-1)} \tag{3.90}$$

Pentru a determina valorile forțelor de interacțiune $P_1, P_2, \ldots P_k$ se folosesc rapoartele:

$$\frac{P_{k-1}}{P_k} = C_{k-1}; \frac{P_k}{P_{k+1}} = C_k \ldots \tag{3.91}$$

Folosind egalitatea săgeților menționate

$$C_{k-1} = \frac{\delta_{11}^{(k)} + \delta_{22}^{[k-1]}}{\delta_{12}^{(k-1)}} - \frac{1}{C_k} \frac{\delta_{12}^{(k)}}{\delta_{12}^{(k-1)}}. \tag{3.92}$$

Dacă arcul are în total $n$ foi, atunci

$$\frac{1}{C_n} = \frac{P_{n+1}}{P_n} = 0, \tag{3.93}$$

deoarece $P_{n+1} = 0$, neexistînd foaia $n+1$.

Rezultă în acest caz:

$$C_{n-1} = \frac{P_{n-1}}{P_n} = \frac{\delta_{11}^{(n)} + \delta_{22}^{(n-1)}}{\delta_{12}^{(n-1)}};$$

$$C_{n-2} = \frac{P_{n-2}}{P_{n-1}} = \frac{\delta_{11}^{(n-1)} + \delta_{22}^{(n-2)}}{\delta_{12}^{(n-2)}} - \frac{1}{C_{n-1}} \frac{\delta_{12}^{(n-1)}}{\delta_{12}^{(n-2)}};$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$C_1 = \frac{P_1}{P_2} = \frac{\delta_{11}^{(2)} + \delta_{22}^{(1)}}{\delta_{12}^{[1]}} - \frac{1}{C_2} \frac{\delta_{12}^{(2)}}{\delta_{12}^{(1)}}, \tag{3.94}$$

unde $P_1$ este forța care acționează în capătul (ochiul) foii principale.

Determinînd coeficienții de raport al forțelor ce pot determina toate forțele, deoarece forța $P_1$ este cunoscută fiind încărcarea arcului, rezultă:

$$P_2 = \frac{P_1}{C_1}; \quad P_3 = \frac{P_2}{C_2}; \ldots; \quad P_n = \frac{P_{n-1}}{C_{n-1}}. \tag{3.95}$$

Relațiile coeficienților de raport al forțelor se pot exprima în funcție de lungimile foilor, folosind relațiile stabilite anterior pentru deplasările $\delta$. Deoarece pentru calculul de proiectare au o importanță mare



ultimii trei coeficienți (corespunzători foilor celor mai scurte), în fig. 3.33 se dau valorile acestora în funcție de raportul $\frac{l_n}{l_{n-1} - l_n}$ și de coeficientul $K$, care depinde de forma capetelor foilor. Deoarece, în majoritatea cazurilor uzuale, arcurile în foi se execută din foi de grosime egală și cu diferențe egale între lungimile foilor vecine, valorile coeficienților $C$ se găsesc în unele tratate calculate pentru anumite condiții.

În tabela 3.7 se dau valorile coeficienților $C$ pentru două situații folosite mai des, și anume:

— lungimea $l_n$ a ultimei foi este egală cu diferența dintre lungimile foilor vecine, adică $l_n = l_k - l_{k+1}$;

— lungimea $l_n$ a ultimei foi este egală cu dublul diferenței dintre lungimile foilor vecine, adică $l_n = 2(l_k - l_{k+1})$.

Pentru fiecare dintre aceste două situații s-a prevăzut și influența modificării capetelor foilor redată prin valoarea coeficientului $K$, a cărui valoare este nulă pentru capetele foilor retezate după o dreaptă și egală cu 0,5 pentru capetele foilor subțiate.

Se observă că majoritatea coeficienților sînt foarte apropiați de unitate, cu excepția ultimilor trei: $C_{n-1}$, $C_{n-2}$, $C_{n-3}$, a căror determinare este importantă pentru calculul precis al eforturilor unitare în ultimele foi.

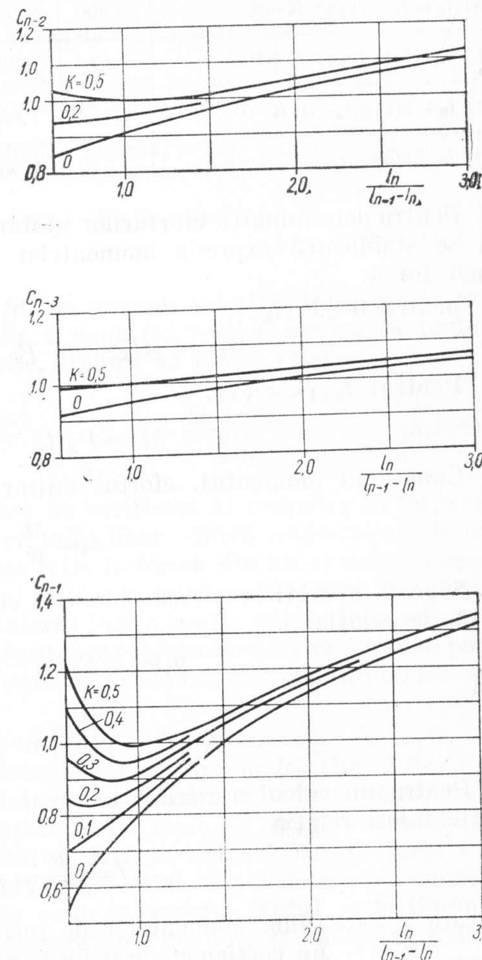



Fig. 3.33

*Tabela 3.7*

**Valorile coeficienţilor $C_{n-1}, \ldots, C_{n-6}$ pentru arcuri în foi cu diferite lungimi ale ultimei foi şi diferite forme ale capetelor foilor**

| Variantele arcurilor (din punctul de vedere al lungimii ultimei foi şi al valorii coeficientului $K$) | $C_{n-1}$ | $C_{n-2}$ | $C_{n-3}$ | $C_{n-4}$ | $C_{n-5}$ | $C_{n-6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a) $l_n=l_k-l_{k+1}$; $K=0$ | 0,800 | 0,920 | 0,957 | 0,975 | 0,983 | 0,988 |
| b) $l_n=l_k-l_{k+1}$; $K=0,5$ | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| c) $l_n=2(l_k-l_{k+1})$; $K=0$ | 1,142 | 1,031 | 1,008 | 1,001 | 0,999 | 0,998 |
| d) $l_n=2(k_k-l_{k+1})$; $K=0,5$ | 1,179 | 1,052 | 1,023 | 1,012 | 1,007 | 1,005 |

Pentru determinarea eforturilor unitare şi a săgeţii arcului este necesar să se stabilească expresia momentelor încovoietoare într-o secţiune a unei foi $k$:

pentru $0<x<l_{k-1}$,

$$M_x=P_k(l_k-x)-P_{k+1}\,(l_{k+1}-x); \tag{3.96}$$

Pentru: $l_{k+1}<x<l_k$,

$$M_x=P_k(l_k-x). \tag{3.97}$$

Cunoscînd momentul, efortul unitar se determină cu relaţia

$$\sigma_i=\frac{M}{W}.$$

Săgeata arcului în foi este identică cu săgeata foii principale şi este dată de relaţia

$$y_1=f=P_1\delta_{11}^{(1)}-P_2\delta_{12}^{(1)} \tag{3.98}$$

sau

$$y_1=f=P_1\left[\delta_{11}^{(1)}-\frac{1}{C_1}\,\delta_{12}^{(1)}\right]. \tag{3.99}$$

Pentru un calcul aproximativ prealabil al săgeţii arcului în foi se poate folosi relaţia

$$f=\varkappa\frac{P\cdot l^3}{3EY}, \tag{3.100}$$

în care $Y$ este suma momentelor de inerţie ale tuturor foilor arcului;
$\varkappa$ — un coeficient de deformare, care depinde de tipul arcului ale cărui valori sînt date în tabela 3.8.



*Tabela 3.8*

**Valorile coeficientului de deformare**

| Tipul arcului | Coeficientul de deformare $\varkappa$ |
|---|---|
| Grindă de egală rezistenţă (arc „ideal") | 1,5 |
| Arcuri cu extremităţile foilor subţiate, apropiate de o grindă de egală rezistenţă (arcuri de autoturism) | 1,4—1,45 |
| Arcuri cu extremităţile foilor retezate după o dreaptă, la care foaia a doua are o lungime egală cu prima şi care au cel mult o foaie deasupra foii principale | 1,35 |
| Arcuri cu extremităţile foilor retezate după o dreaptă, avînd două-trei foi egale în lungime cu foaia principală şi cîteva foi deasupra foii principale | 1,3 |
| Arcuri deosebit de grele cu un număr mare de foi de aceeaşi lungime | 1,25 |

Dacă arcul este executat din foi de grosimi diferite, între grosimea foilor şi diferenţa dintre lungimile a două foi vecine, pentru ca toate calculele menţionate să fie valabile, trebuie să existe relaţia

$$\frac{l_k-l_{k+1}}{h_k^3}=\frac{l_{k+1}-l_{k+2}}{h_{k+1}^3}=\ldots=\frac{l_{n-1}-l_n}{h_{n-1}^3}. \tag{3.101}$$

În calculul de dimensionare sau de verificare al arcurilor în foi trebuie să se aibă în vedere faptul că foile libere diferă ca formă de foile din arcul strîns. Pentru a se aduce foile la forma din arcul strîns, acestea sînt strînse astfel că în arcul în foi montat există între foi forţe de interacţiune care apar la asamblarea foilor în arc. Aceste forţe se consideră că acţionează la capetele foilor, iar mărimile acestor forţe se pot determina prin aceeaşi metodă folosită la determinarea modului de transmitere a sarcinilor exterioare.

Între foile unui arc în stare liberă există jocurile $J_1$, $J_2$, ... $J_{n-1}$ (fig. 3.34, $a-d$), care în urma asamblării arcului în foi (fig. 3.34, $e$), dispar. Dacă se presupune că la montarea arcului se strînge penultima foaie pe ultima foaie, apoi antepenultima foaie pe grupul format de ultimele două şi aşa mai departe, şi dacă se notează cu $Q_k$ forţa de strîngere care acţionează în capătul foii, acestea se pot determina cunoscînd mărimile jocurilor. Trebuie avut în vedere faptul că în timpul asamblării succesive, odată cu montarea unei noi foi, se modifică toate forţele de interacţiune care acţionează între foile de arc deja montate. În fig. 3.34, $a-e$ se arată modul de strîngere succesiv a foilor arcului.

Folosind metoda de calcul aproximativ bazată pe ipoteza transmiterii forţelor prin extremităţi pentru un arc care are $n$ foi, în cazul strîngerii penultimei foi, $n-1$ pe ultima foaie pînă la anularea jocului $j_{n-1}$, se poate scrie, folosind aceleaşi notaţii:

$$j_{n-1}=Q_n\left[\delta_{11}^{(n)}+\delta_{22}^{(n-1)}\right], \quad (3.102)$$

de unde

$$Q_n=\frac{j_{n-1}}{\delta_{11}^{(n)}+\delta_{22}^{(n-1)}}. \quad (3.103)$$

Făcînd calculul pînă la prima foaie, pe baza aceleiaşi metode, se obţine:

$$Q_{n-1}=\frac{j_{n-2}+Q_n\,\delta_{12}^{(n-1)}}{C_{n-2}\,\delta_{12}^{(n-2)}};$$

$$Q_{n-2}=\frac{j_{n-3}+Q_{n-1}\,\delta_{12}^{(n-2)}}{C_{n-3}\,\delta_{12}^{(n-3)}}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$Q_3=\frac{j_2+Q_4\,\delta_{12}^{(3)}}{C_2\,\delta_{12}^{(2)}}; \quad (3.104)$$

$$Q_2=\frac{j_1+Q_3\,\delta_{12}^{(2)}}{C_1\,\delta_{12}^{(1)}}$$

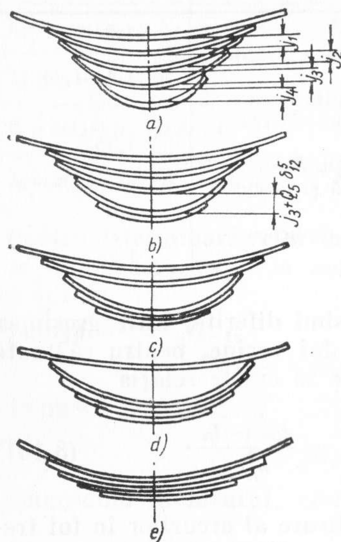


Fig. 3.34

Forţa $Q_1=Q=0$, deoarece, la montare, la extremităţile primei foi nu apare nici o forţă de interacţiune.

Forţele $Q_k$ apar în momentul asamblării foii respective. În timpul montării foilor următoare superioare, valorile lor se modifică, adăugîndu-se şi partea de sarcină care se transmite prin capetele foilor montate. Valorile forţelor totale de interacţiune care acţionează în capetele foilor se determină cu relaţiile:

$$P'_2=Q_2;$$

$$P'_3=Q_3+\frac{P'_2}{C_2};$$

. . . . . . . . . . . . (3.105)

$$P'_n=Q_n+\frac{P'_{n-1}}{C_{n-1}}.$$



Variaţia săgeţii foii principale a arcului este dată de relaţia:

$$f'=P'_2\,\delta_{12}^{(1)}. \quad (3.106)$$

Chiar dacă nu există o sarcină exterioară care să acţioneze asupra arcului montat, în fiecare foaie în parte apar solicitări datorită forţelor de asamblare, care produc momente şi deci eforturi unitare suplimentare. Suma acestor momente în secţiunea de încastrare trebuie să fie nulă şi deci:

$$M'_1+M'_2+\ldots+M'_n=0=\Sigma\sigma' W, \quad (3.107)$$

unde $W$ este modulul de rezistenţă al foii $k$.

Rezultă că eforturile unitare în diferite foi sînt de semne diferite (deoarece suma de mai sus este nulă). Astfel, în foaia cea mai lungă, ele au semn negativ, iar în foaia cea mai scurtă — semnul pozitiv. Între forţele de strîngere şi eforturile unitare care se produc în foi există relaţiile:

$$P'_n=\sigma'_n\frac{W_n}{l_n};$$

$$P'_{n-1}=\frac{\sigma'_{n-1}\,W_{n-1}}{l_{n-1}}-P'_n\frac{l_n}{l_{n-1}};$$

$$P'_{n-2}=\frac{\sigma'_{n-2}\,W_{n-2}}{l_{n-2}}-P'_{n-1}\frac{l_{n-1}}{l_{n-2}}; \quad (3.108)$$

. . . . . . . . . . . . . . . .

$$P'_2=\frac{\sigma'_2\,W_2}{l_2}-P'_3\frac{l_3}{l_2}.$$

În foile scurte, efortul unitar datorit strîngerii este de acelaşi semn cu efortul unitar produs de sarcina exterioară (încărcarea arcului în foi), astfel că cele două eforturi se adună, iar în foile lungi este de semn contrar, astfel că eforturile unitare cele mai mari şi mai periculoase apar în foile cele mai scurte.

Între săgeţile foilor în stare liberă şi săgeţile foilor din arcul asamblat (fig. 3.35) există relaţia:

$$y_k=y'_k+P'_k\,\delta_{11}^{(k)}-P'_{(k-1)}\,\delta_{12}^{(k)}, \quad (3.109)$$

în care $y_k$ este săgeata foii de ordinul $k$ liberă;
$y'_k$ — săgeata foii de ordinul $k$ în arcul montat.

La calculul de dimensionare al unui arc în foi trebuie să se dea o atenție deosebită eforturilor unitare care se produc în ultimele trei foi, a căror mărime este de regulă substanțial mai mare decît în celelalte foi. În acest scop este necesar să se determine în prealabil expresia momentelor încovoietoare din secțiunile de încastrare din aceste foi.

Momentele încovoietoare și eforturile unitare în ultimele trei foi ale unui arc cu $n$ foi, în raport cu momentul de încovoiere total $M_i$, care lucrează în secțiunea de încastrare, sînt date de relațiile:

$$M_{n-2}=\frac{M_i}{\dfrac{l_{n-1}}{C_{n-2}(l_{n-2}-l_{n-1})}+\sum\dfrac{I_k}{I_{n-2}}} \quad \text{și}\ \sigma_{n-2}=\frac{M_{n-2}}{W_{n-2}};$$

$$M_{n-1}=M_{n-2}\frac{C_{n-1}(l_{n-1}-l_n)}{C_{n-1}(C_{n-2}\cdot l_{n-2}-l_{n-1})} \quad \text{și}\ \sigma_{n-1}=\frac{M_{n-1}}{W_{n-1}};$$

$$M_n=M_{n-2}\frac{l_n}{C_{n-1}(C_{n-2}\,l_{n-2}-l_{n-1})} \quad \text{și}\ \sigma_n=\frac{M_n}{W_n}. \tag{3.110}$$

Dacă eforturile unitare în ultimele foi depășesc valorile admisibile, o cale pentru a simplifica calculul de proiectare constă în înlocuirea ultimei sau ultimelor foi prin mai multe foi subțiri în care vor apărea eforturi unitare mai mici.

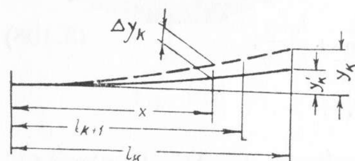



Fig. 3.35

În calculele prezentate anterior s-a considerat cazul arcului în foi în formă de jumătate de arc, adică cazul arcului cu un capăt încastrat în brida de stringere și cu celălalt solicitat de sarcină.

Pentru arcurile semieliptice, cantilivere sau pentru arcurile închise, relațiile de calcul sînt similare, deosebirea constînd numai la determinarea mărimii săgeții, adică a deplasării bridei de legătură, fiind necesar să se adune săgețile care rezultă din fiecare parte.

### 3.2.6. Încărcarea arcului prin eclise oblice

După cum s-a arătat în paragraful 3.2.2, în foarte multe cazuri, mai ales la arcurile de suspensie folosite la materialul rulant, sarcina se transmite pe capetele arcului după o direcție înclinată față de verticală, prin intermediul unor eclise articulate prin buloane cu un capăt de ochiul



arcului și celălalt capăt de suportul de arc. Trebuie observat, de asemenea, faptul că foaia principală nu este dreaptă, ci are — din construcție — o curbură. În acest fel ea prezintă o săgeată inițială $f_0$, care variază la încărcarea arcului. În acest caz semilungimea foii, $l_f$, diferă de lungimea $l$ a semideschiderii arcului (fig. 3.36).

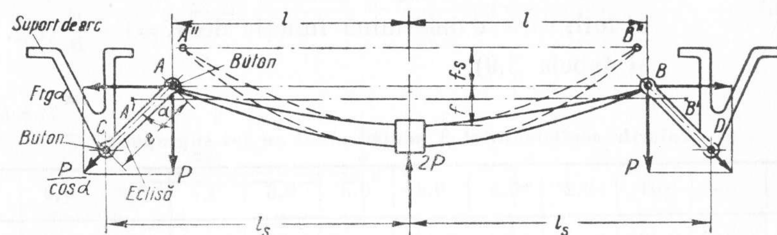



Fig. 3.36

Valorile lui $\sigma$ și $f$ pentru acest caz sînt cele date de relațiile (3.70) și (3.71). Trebuie avut în vedere însă că secțiunea de încastrare a foilor nu se află chiar la mijlocul bridei de stringere, ci la o distanță egală cu a șasea parte din lățimea $a$ (v. fig. 3.19) a bridei.

Pe baza acestui considerent, relațiile (3.70) și (3.71) devin:

$$\sigma_{max}=\frac{6P\left(l-\dfrac{a}{6}+f_1\,\text{tg}\,\alpha\right)}{nbh^2} \tag{3.111}$$

$$f=B\frac{4P\left(l-\dfrac{a}{6}\right)^3}{nbh^3E}\left[1+\frac{f_1}{l-\dfrac{a}{6}}\,\text{tg}\,\alpha\right] \tag{3.112}$$

Pentru un calcul mai precis trebuie avut în vedere că mărimile $l$, $\alpha$ și $f_1$ sînt variabile depinzînd de mărimea sarcinii $P$. Din această cauză unii autori (de exemplu Siefried Gross) deosebesc două cazuri: arcul în foi cu o deformație mică (rigiditate mare și încărcare redusă) și arcul în foi cu deformații mari.

Pentru primul caz săgeata este dată de relația:

$$f=\frac{P\cdot l_f}{EI}\left[\frac{l_f}{3}B+F_1\left(\frac{l}{l_f}\right)\beta\,\text{tg}\,\alpha\right], \tag{3.113}$$

în care $l_f$ este semilungimea foii principale;

$l$ — semideschiderea arcului;

$B$ — coeficient în funcţie de forma trapezoidală a foii, dat în tabela 3.5;

$\beta$ — coeficient care depinde de forma capătului trapezoidal al foii, care se determină funcţie de $K=1-\frac{B_1}{B_2}$ (fig. 3.37 şi tabela 3.9).

*Tabela 3.9*

**Valorile coeficientului β pentru arcul cu foi suprapuse**

| $K$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\beta$ | 0,417 | 0,429 | 0,442 | 0,467 | 0,473 | 0,493 | 0,513 | 0,539 | 0,569 | 0,609 | 0,667 |

Pentru cazul al doilea al deformărilor mari, săgeata

$$f=\frac{1+\frac{P_1 l_f^2}{EI}\beta \operatorname{tg}\alpha_1}{1+\frac{P_1 l_f^2}{EI}\beta \operatorname{tg}\alpha}\cdot\frac{P l_f^2}{EI}\left(\frac{l_f}{3}B+f_1' \operatorname{tg}\alpha_1\right), \tag{3.114}$$

unde $P_1$, $\alpha_1$ şi $f_1'$ sînt valori corespunzătoare unei sarcini determinate iniţial şi considerată de referinţă (ca punct de pornire). Prin variaţia sarcinii $P$, mărimile $\alpha$ şi $f$ se modifică, deoarece prin coborîrea capetelor arcurilor eclisele se rotesc. Dacă lungimea ecliselor (v. fig. 3.36) este $e$, iar ele se rotesc cu un unghi $\alpha-\alpha_1$, capetele ecliselor articulate la capetele foii principale de arc se ridică cu distanţa $s=e(\cos\alpha-\cos\alpha_1)$, astfel că linia orizontală $AB$ (v. fig. 3.36), care uneşte centrele buloanelor de articulaţie, se deplasează cu distanţa

$$d=f'-(f-f_1)+s, \tag{3.115}$$

iar deschiderea arcului $2l$ se modifică în funcţie de mărimea unghiului $\alpha$, ..., dacă se notează cu $2l_s$ distanţa dintre centrele articulaţiilor eclisei la suporturile de arc

$$\sin\alpha=\frac{l_s-l}{e}. \tag{3.116}$$



Considerînd curbura foii principale aproximativ un arc de cerc (fig. 3.38) se pot scrie relaţiile:

$$\frac{l}{l_f}=\frac{\sin\varphi}{\varphi}-\frac{2e+h}{2l_f}\sin\varphi;$$

$$\frac{f_1}{l_f}=\frac{1-\cos\varphi}{\varphi}+\frac{2e+h}{2l_f}\cos\varphi-\frac{h}{2l_f}. \tag{3.117}$$

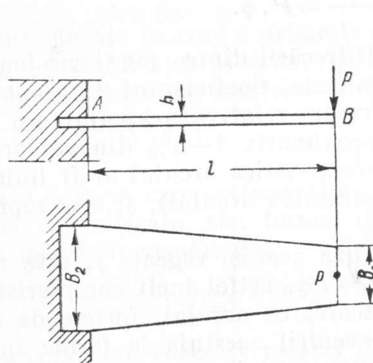


Fig. 3.37

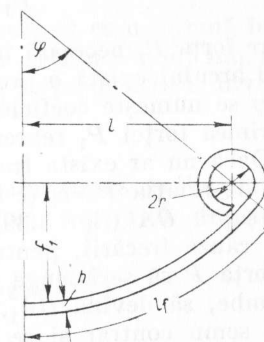


Fig. 3.38

Relaţiile (3.116) şi (3. 117) servesc la determinarea valorilor $l$ şi $\alpha$ pentru o valoare $f_1'$ impusă unui arc, la care se cunosc $h$, $l_f$, $r$ şi $e$. Odată determinate aceste valori, se poate obţine săgeata $f$ cu relaţia (3.114).

### 3.2.7. Influenţa forţelor de frecare asupra caracteristicii arcului

În timpul deformării arcului, datorită alunecării relative, între foi apare o forţă de frecare care-i schimbă caracteristica. Considerînd că transmiterea sarcinii între foile arcului are loc prin capetele arcului (forţele de frecare apar în aceste puncte), asupra unei foi vor acţiona — pe faţa superioară şi pe cea inferioară — două forţe de frecare aproximativ egale şi de semn contrar, formînd un cuplu. Excepţie fac prima şi ultima foaie, asupra cărora acţionează numai cîte o forţă. Considerînd forţele în capetele foilor aproximativ egale cu forţa $P$ din capătul

arcului, valoarea fiecărei forțe de frecare fiind astfel $\mu P$, suma momentelor forțelor de frecare:

$$(n-2)\,\mu\,Ph+2\,\mu\,P\frac{h}{2}=(n-1)\,\mu\,Ph=P_1\,l, \tag{3.118}$$

unde $P_1$ este forța din capătul arcului, necesară pentru a învinge frecarea dintre foi.

Rezultă:

$$P_1=\frac{P\,(n-1)\,h}{l}=P\,.\,\varphi. \tag{3.119}$$

Între forța $P_1$ necesară învingerii frecării dintre foi și sarcina $P$ din capătul arcului există o proporționalitate. Coeficientul de proporționalitate $\varphi$ se numește coeficient de frecare relativă a arcului.

Mărimea forței $P_1$ reprezintă aproximativ 4—5% din valoarea sarcinii. Dacă nu ar exista frecare, caracteristica arcului ar fi liniară, ar fi dată de relația $P=cf$ ($c$ fiind rigiditatea arcului), și s-ar reprezenta prin dreapta $OA$ (fig. 3.39).

Din cauza frecării, pentru a realiza aceeași săgeată $f$, este necesar ca la forța $P$ să se adauge forța $P_1=P\varphi$, astfel încît caracteristica să se schimbe, să devină $OA_1$. La descărcarea arcului, forțele de frecare sînt de semn contrar și se opun revenirii acestuia la forma inițială. Pentru a se produce o variație a săgeții arcului — este necesar ca acesta să fie descărcat cu o forță $P_1+P_2$, forța $P_2$ fiind forța necesară învingerii frecării care apare la descărcarea arcului, caracteristica acestuia la descărcare fiind $OA_2$. Pentru a determina suma forțelor $P_1+P_2$ corespunzătoare unei săgeți oarecare se trasează dreapta $M_1M_2$ paralelă la axa ordonatelor.

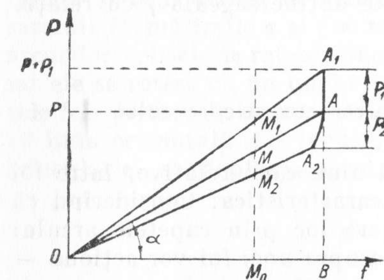


Fig. 3.39

Pentru un calcul mai exact al forței necesare învingerii frecării la arcul în foi, se poate utiliza relația

$$P=cf(1\pm\mu a)\pm\mu b, \tag{3.120}$$

în care:

$$a=\frac{1}{l_2}\sum_{k=2}^{n} l_k\,(l_k+h_{k-1});$$

$$b=\frac{1}{l_2}\sum_{k=2}^{n} P'_k\,l_k\,(h_k+h_{k-1}), \tag{3.121}$$

care ține seama de grosimile și lungimile fiecărei foi. Semnul plus corespunde încărcării arcului, iar semnul minus — descărcării lui, notațiile fiind cele folosite anterior.



### 3.2.8. Oscilațiile arcurilor în foi

În cazul cînd arcurile în foi sînt supuse oscilațiilor, este necesar să se ia în considerație și frecarea dintre foi.

După cum s-a amintit, forța necesară pentru a învinge frecarea dintre foi în stare de repaus este:

$$P_1=\varphi P. \tag{3.122}$$

Dacă săgeata pe care o primește arcul încărcat cu o sarcină în repaus este $f_s$, iar rigiditatea sa este $c$, și dacă sub acțiunea unui impuls oarecare săgeata crește cu mărimea $y$, expresia forței pentru a învinge frecarea din arc devine:

$$P_1=\varphi c(f_s+y). \tag{3.123}$$

Dacă sarcina care acționează asupra arcului supus oscilațiilor este $P$, ecuația de mișcare are forma (schimbarea semnului depinzînd de sensul mișcării) următoare:

$$P\pm\varphi\,c\,(f_s+y)-(f_s+y)\,c=\frac{P}{g}\frac{d^2y}{dt^2}\,. \tag{3.124}$$

Transformînd succesiv relația (3.124), devine:

$$\frac{P}{g}\frac{d^2y}{dt^2}+c\,y\pm\varphi c\,(f_s+y)=0; \tag{3.125}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{(1\mp\varphi)\,gc}{P}\,y\mp\frac{\varphi f_s}{1\mp\varphi}=0. \tag{3.126}$$

Notînd

$$\omega_1^2=\frac{(1-\varphi)gc}{P}\ \text{ și }\ \omega_2^2=\frac{(1+\varphi)gc}{P}\,. \tag{3.127}$$

Rezultînd ecuațiile de mișcare după cum urmează: pentru deplasarea sarcinii de jos în sus

$$y=A_1\cos\omega_1 t+B_1\sin\omega_1 t+\frac{\varphi f_s}{1-\varphi}\ ; \tag{3.128}$$

pentru deplasarea sarcinii de sus în jos:

$$y=A_2\cos\omega_2 t+B_2\sin\omega_2 t-\frac{\varphi f_s}{1+\varphi}\,. \tag{3.129}$$

La prima ecuație, pentru determinarea constantelor $A_1$ și $B_1$, se poate considera că la $t=0$, $y=y_0$, $\frac{dy}{dt}=0$,

deci

$$y=\left(y_0-\frac{\varphi f_s}{1-\varphi}\right)\cos\omega_1 t+\frac{\varphi f_s}{1-\varphi}. \tag{3.130}$$

Pentru $t=t_1=\frac{\pi}{\omega_1}$ rezultă amplitudinea:

$$y_1=-y_0+\frac{2\varphi f_s}{1-\varphi}\approx -y_0+2\varphi f_s. \tag{3.131}$$

Pentru determinarea constantelor $A_2$ și $B_2$ se consideră că, la $t=0$, $y=y_1$, $\frac{dy}{dt}=0$, astfel că rezultă:

$$y=\left(-y_0+\frac{\varphi f_s}{1-\varphi}+\frac{\varphi f_s}{1+\varphi}\right)\cos\omega_2 t-\frac{\varphi f_s}{1+\varphi}. \tag{3.132}$$

Pentru $t=\frac{\pi}{\omega_2}$ rezultă amplitudinea:

$$y_2=y_0-\frac{4\varphi f_s}{1-\varphi^2}\approx y_0-4\varphi f_s. \tag{3.133}$$

Se observă că după fiecare schimbare de sens a mișcării, amplitudinea se micșorează cu $2\varphi\ f_s$. Perioada unei oscilații complete fiind:

$$T=\frac{\pi}{\omega_1}+\frac{\pi}{\omega_2}=2\pi\sqrt{\frac{f_s}{g}}\approx 0,2\sqrt{f_s}. \tag{3.134}$$

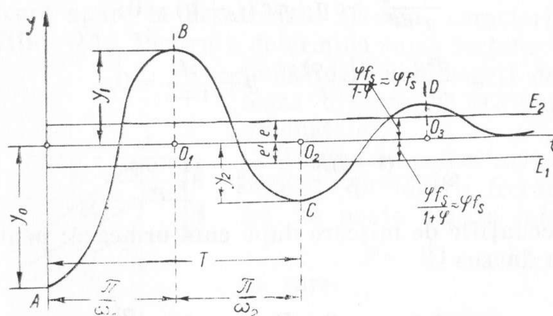



Fig. 3.40

Mișcarea sarcinii este o mișcare oscilatorie, amortizată, a cărei diagramă este reprezentată în fig. 3.40.

Se mai observă că dacă sarcina este mică, sub o anumită limită forțele de frecare frînează arcul, astfel că el rămîne insensibil la impulsurile mici.



Dacă se consideră cazul $\frac{d^2y}{dt^2}=0$, adică echilibrul arcului, rezultă:

$$\omega_1^2\left(y-\frac{\varphi f_s}{1-\varphi}\right)=0 \text{ și } \omega_2^2\left(y+\frac{\varphi f_s}{1\pm\varphi}\right)=0, \tag{3.135}$$

de unde

$$y=\pm\frac{\varphi f_s}{1\pm\varphi}. \tag{3.136}$$

Între aceste limite, denumite săgețile frecării, este cuprinsă zona de echilibru a arcului sau zona moartă. În fig. 3.40, această zonă este determinată aproximativ de dreptele $E_1$ și $E_2$, distanța între ele fiind $2\varphi f_s$.

### 3.2.9. Arcuri în foi, simple, cu brațe neegale

Relațiile de calcul pentru arcurile în foi indicate anterior se referă la jumătăți de arc egale. Deseori la autovehicule se întîlnesc arcuri cu brațe neegale de lungimi $l_1$ și $l_2$ (fig. 3.41), capetele $A$ și $B$ aflîndu-se de obicei pe aceeași orizontală.

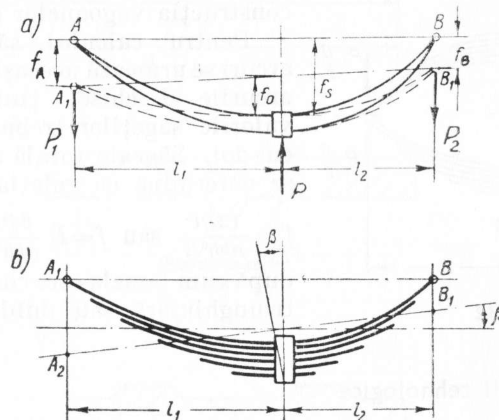



Fig. 3.41

Dacă asupra arcului, în brida de strîngere acționează forța $P$, la capete vor acționa sarcinile:

$$P_1=\frac{l_2}{l_1+l_2}P \text{ și } P_2=\frac{l_1}{l_1+l_2}P. \tag{3.137}$$

Săgeţile la capete vor avea valorile aproximative:

$$f_A = B\frac{l_1^3}{3EI}P_1 = B\frac{l_1^3 l_2}{3EI(l_1+l_2)}P; \qquad (3.138)$$

$$f_B = B\frac{l_2^3}{3EI}P_2 = B\frac{l_2^3 l_1}{3EI(l_1+l_2)}P.$$

Mărimile acestor săgeţi nu sînt egale şi din această cauză, după încărcare, arcul se înclină faţă de orizontală cu un unghi $\beta$. Deoarece, de regulă, capetele $A$ şi $B$ se află mereu pe o aceeaşi orizontală, legătura arcului suferă o rotaţie cu unghiul $\beta$, ceea ce impune constructorului să prevadă posibilitatea de rotire a legăturii pe suportul său cu unghiul $\beta$.

Deplasarea legăturii arcului este dată de relaţia:

$$f = f_s - f_o = f_B + (f_A - f_B)\frac{l_2}{l_1+l_2} = B\frac{l_1^2 l_2^2 P}{3EI(l_1+l_2)}. \qquad (3.139)$$

### 3.2.10. Arcuri în foi închise

Aceste arcuri se întîlnesc curent în construcţia vagoanelor (fig. 3.42).

Pentru calculul săgeţilor acestor arcuri se urmează aceeaşi cale ca pentru arcurile deschise, ţinînd seamă că valorile săgeţilor trebuie multiplicate cu doi. Săgeata totală a acestor arcuri se determină cu relaţia

$$f = \frac{12Pl^3}{nbh^3E} \quad \text{sau} \quad f = B\frac{8Pl^3}{nbh^3E}, \quad \text{(fig. 3.140)}$$

după cum lamela este considerată dublu triunghiulară sau dublu trapezoidală.

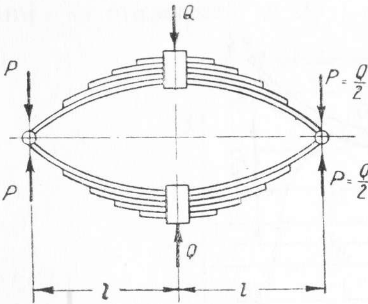



Fig. 3.42

### 3.2.11. Indicaţii tehnologice

Arcurile în foi multiple se execută din benzi de oţel pentru arcuri prelucrate la cald avînd dimensiunile şi caracteristicile standardizate. Profilul laminat al oţelului pentru foi de arc poate avea diferite forme. În fig. 3.43, $a-f$, sînt arătate diferite forme ale acţiunii foii de arc.

Prima variantă a secţiunii (fig. 3.43 $a$) este o formă dreptunghiulară cu muchiile rotunjite şi cu o concavitate în limitele de 0,1—0,2 mm.

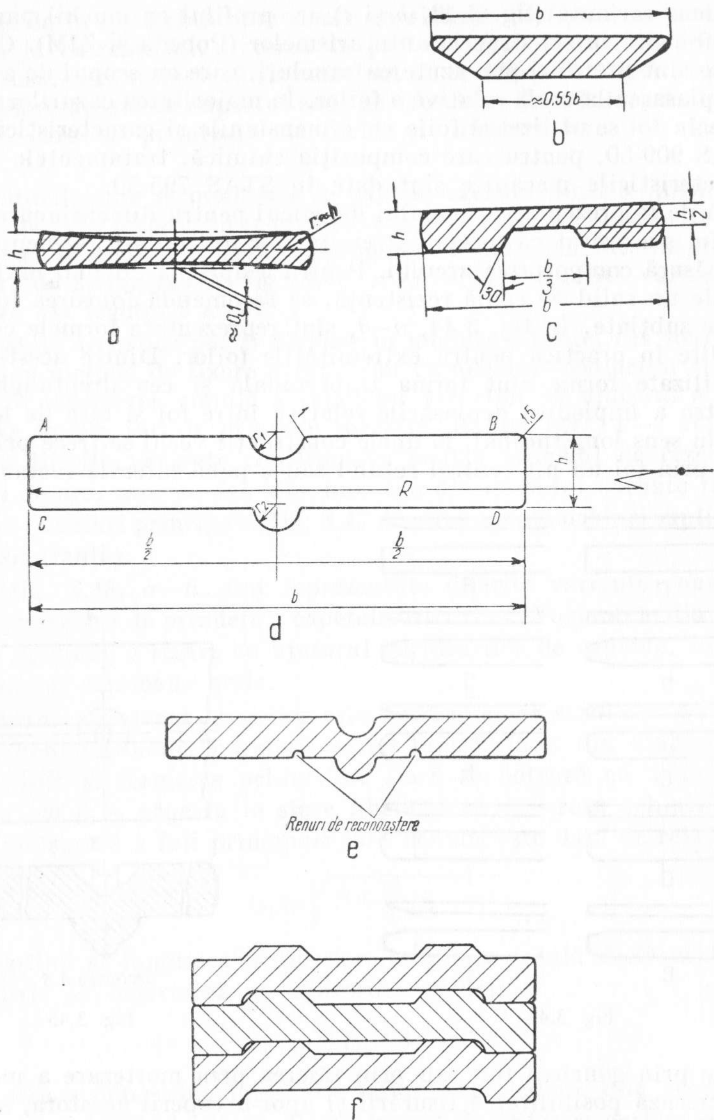
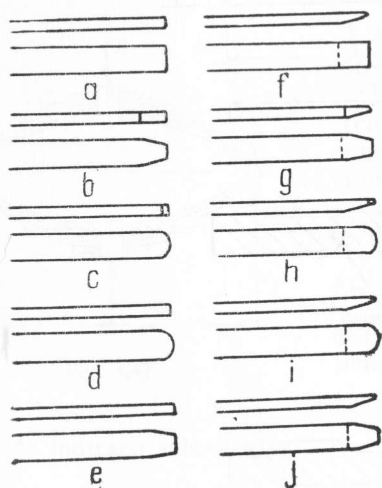



Fig. 3.43

A doua variantă (fig. 3.43, *b* și *c*) are profilul cu muchii parabolice și este folosită în construcția autoturismelor (Pobeda și ZIM). Celelalte variante sînt profiluri prevăzute cu caneluri, care au scopul de a împiedica deplasarea laterală relativă a foilor. În majoritatea cazurilor, pentru arcurile în foi se utilizează foile cu dimensiunile și caracteristicile date în STAS 909-50, pentru care compoziția chimică, tratamentele termice și caracteristicile mecanice sînt date în STAS 795-50.

Încă de la prezentarea modului de calcul pentru dimensionarea arcului în foi s-a arătat că forma extremităților foii de arc influențează în mare măsură comportarea arcului. Pentru a apropia cît mai mult arcul în foi de un solid de egală rezistență, se recomandă folosirea foilor cu capetele subțiate. În fig. 3.44, *a—j*, sînt reprezentate formele cele mai răspîndite în practică pentru extremitățile foilor. Dintre acestea, cele mai utilizate forme sînt forma trapezoidală și cea dreptunghiulară.

Pentru a împiedica deplasările relative între foi și față de legătura de arc în sens longitudinal, la unele construcții vechi se trece prin legătură și prin foi un nit central rotund sau o pană laterală rectangulară.



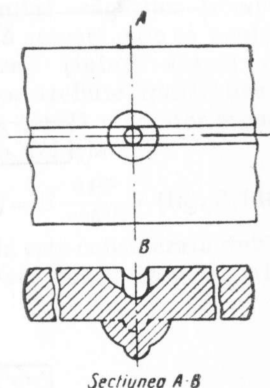




Fig. 3.44

A

B

Secțiunea A-B

Fig. 3.45

Deoarece prin găurirea foii sau prin tăierea prin mortezare a marginii foii se creează posibilitatea fisurării și apoi a ruperii acestora, se folosește aplicarea în centrul foii a unei epolări, a realizării unei proeminențe, prin presare la cald cu ajutorul unui dorn (fig. 3.45).



Arcurile în foi trebuie prevăzute cu sisteme de fixare în partea centrală și la extremități. Fixarea în partea centrală se face prin bride de legătură, care trebuie să fie suficient de solide și totodată să permită o asamblare ușoară cu suportul său. Se deosebesc două feluri de legături: legături care se montează la cald și legături care se montează la rece.

Legăturile care se montează la cald se execută dintr-o singură piesă din OL 34 prin forjare dintr-un bloc sau prin sudură. Legăturile care se montează la rece realizează strîngerea foilor prin intermediul unor șuruburi de strîngere. În fig. 3.46, *a—h* se dau diferite variante constructive ale legăturii arcului.

Capetele arcurilor pot fi dispuse în moduri diferite, cea mai răspîndită fiind metoda de fixare a capetelor cu ajutorul ochiurilor și al eclisselor sau rezemarea simplă a capetelor arcurilor cu ajutorul a diferite piese de sprijin sau de prindere speciale. În fig. 3.47, *a—i* sînt reprezentate diferite variante constructive pentru sistemul de rezemare cu ochiuri de arc, care se fac din una sau din două foi curbate (fig. 3.47 *a, b, c* — ochiuri principale, fig. 3.47 *d—i* reprezintă ochiuri suplimentare — de siguranță).

În fig. 3.48, *a—h* sînt reprezentate diferite variante constructive de rezemare sau de prindere a capetelor arcurilor. Variantele din fig. 3.48 *g* și *h* prezintă o fixare cu ajutorul garniturilor de cauciuc, folosită la autobuze și camioane grele.

Pentru executarea arcurilor este necesar să se stabilească lungimile foilor. Foaia principală trebuie astfel tăiată, încît din lungimea ei să fie posibilă și formarea ochiurilor. Dacă se notează cu $l$ deschiderea arcului, cu $f_0$ — săgeata în stare liberă și cu $r$ — raza ochiului, lungimea desfășurată a foii principale fără ochiuri este dată de relația:

$$l_{d1} \approx \sqrt{l^2 + \frac{16}{3}(f_0 - r)^2}\,. \tag{3.141}$$

Socotind și lungimea ochiurilor, lungimea totală desfășurată a foii principale se determină cu ajutorul relației:

$$l_{d\ tot} = l_{d1} + 4(\pi r + h). \tag{3.142}$$

Pentru a determina lungimile foilor intermediare este necesar să se respecte relația de legătură dintre lungimile foilor și curburile lor arătate anterior.

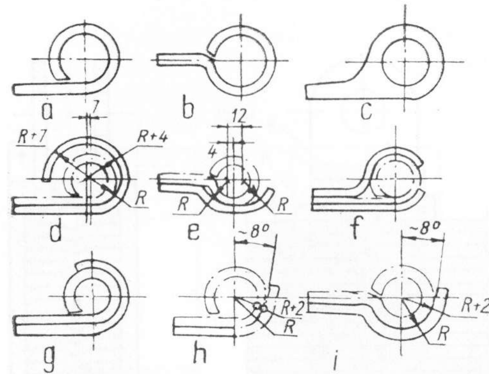



Fig. 3.47

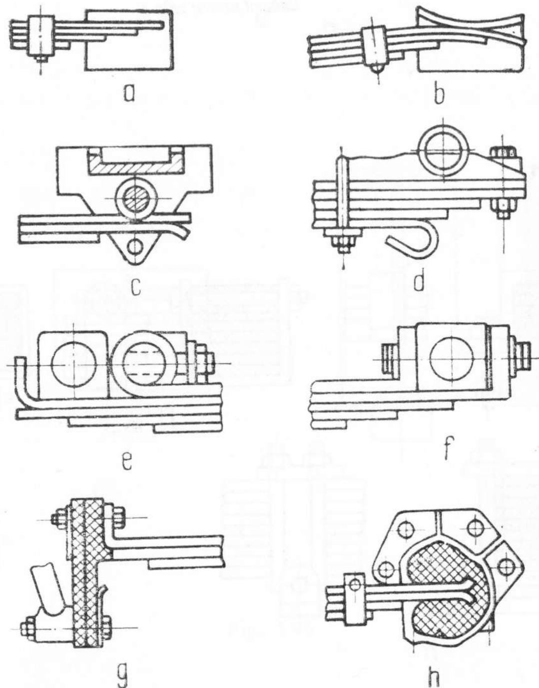



Fig. 3.48



### 3.2.12. Exemple de calcul

**Exemplul 1.** Un arc dreptunghiular cu lungimea $l=70$ mm şi înălţimea $h=0,12$ cm exercită, la capătul său liber, asupra unui mecanism, o apăsare echivalentă cu o forţă de 2,5 kgf. Să se dimensioneze arcul şi să se stabilească săgeata lamelei dacă se admite un efort unitar maxim admisibil $\sigma_{ai}=6\ 000$ kgf/cm².

*Rezolvare.* Lăţimea arcului lamelar este dată de relaţia

$$b=\frac{6Pl}{h^2\sigma_{ai}}=\frac{6\times 2,5\times 7}{0,12^2\times 6\ 000}=1,22 \text{ cm}.$$

Se ia $b=1,3$ cm, astfel că secţiunea arcului lamelar $A=1,2\times 13=15,6$ mm², iar momentul de inerţie al secţiunii $I=\frac{1}{12}1,3\times 0,12^3=1,87\times 10^{-4}$ cm⁴.

Săgeata la capătul arcului lamelar (săgeata iniţială de preformare a lamelei de care trebuie ţinut seamă la montaj) este

$$f=\frac{Pl^3}{3EI}=\frac{2,5\times 7^3}{3\times 2,1\times 10^6\times 1,87\times 10^{-4}}=7,3\times 10^{-1} \text{ cm}$$

$$f=7,3 \text{ mm}.$$

**Exemplul 2.** Să se calculeze secţiunea unui arc lamelar dreptunghiular cu lungimea $l=6$ cm, folosit la acţionarea unui clichet, ştiind că pentru o săgeată $f=5$ mm, arcul trebuie să exercite la capătul său liber o apăsare $P=2,5$ kgf (fig. 3.49).

*Rezolvare*: Din expresia săgeţii la extremitatea arcului se poate deduce momentul de inerţie necesar:

$$I=\frac{Pl^3}{3Ef}=\frac{2,5\times 6^3}{3\times 2,2\times 10^6\times 0,5}=\frac{1}{6\ 100} \text{ cm}^4.$$

Momentul de inerţie pentru o secţiune dreptunghiulară $I=\frac{bh^2}{12}$. Alegînd $h=1$ mm$=0,1$ cm se obţine

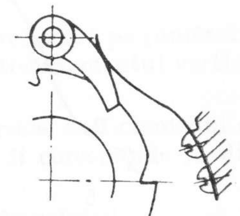


Fig. 3.49

$$b=\frac{12\cdot I}{h^3}=\frac{12}{6\ 100\times 0,001}=1,97 \text{ cm}\approx 19,7 \text{ mm}.$$

Prin rotunjire, lăţimea $b=20$ mm.

Secţiunea arcului $A=1\times 20=20$ mm².

Efortul unitar maxim

$$\sigma_{i\ max}=\frac{M}{W}=\frac{Pl}{\frac{bh^2}{6}}=\frac{6\times2{,}5\times6}{2\times0{,}1^2}=4\ 500\ \text{kgf/cm}^2.$$

Pentru construcţia arcului se poate alege materialul. Arc 1, după STAS 795-62, care are $\sigma_r=140$ kgf/cm². În acest caz coeficientul de siguranţă

$$c=\frac{\sigma_r}{\sigma_{ief}}=\frac{14\ 000}{4\ 500}=3{,}1.$$

**Exemplul 3.** Să se determine deplasarea capătului liber al unei lamele de oţel încastrată la celălalt capăt, care are lungimea $l=80$ cm, lăţimea $b=6$ cm şi grosimea $h=0{,}3$ cm, dacă este încărcată cu o forţă $P=150$ gf, care acţionează în sensul lungimii lamelei (fig. 3.50, *a*).

*Rezolvare.* Lamela indicată face parte din clasa de bază, deoarece satisface condiţiile care se impun clasei de bază, rigiditatea la încovoiere a barei şi curbura sa iniţială fiind constante, iar sarcina care solicită bara avînd forma unei forţe concentrate.

Se alege sistemul de axe indicat în fig. 3.50 *b*.

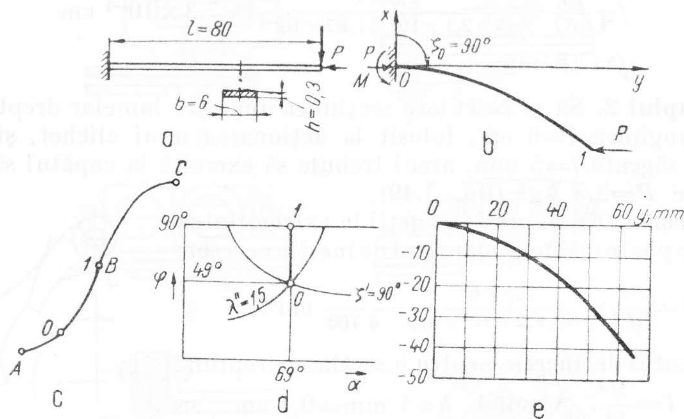



Fig. 3.50

Forţa critică pentru care bara îşi pierde stabilitatea se obţine cu ajutorul formulei lui Euler:

$$P_{cr}=\frac{\pi^2EI_{min}}{(l_f^2)}.$$



Pentru bara încastrată la un capăt şi liberă la celălalt, $l_f=2\,l$.

Rezultă:

$$P_{cr}=\frac{\pi^2\times2{,}1\times10^6\times\frac{6\times0{,}3^3}{12}}{(2\times80)^2}=0{,}110\ \text{kgf}.$$

Deoarece sarcina indicată în enunţ este mai mare decît sarcina critică, lamela îşi pierde stabilitatea şi ia forma încovoiată, indicată în fig. 3.50, *c*.

Parametrii principali de similitudine, ţinînd seamă de sistemul de referinţă ales, au valorile $\omega_1=0$ şi $\zeta_0=0$.

Coeficientul de forţă de similitudine

$$\beta=l\sqrt{\frac{P}{EI}}=80\sqrt{\frac{0{,}150}{2{,}1\times10^4\times\frac{6\times0{,}3^3}{12}}}=1{,}84.$$

Curbura în originea 0 este $\frac{1}{\rho_0}>0$ (pozitivă), iar $\zeta_0=0$. Folosind tabela 3.4 rezultă că linia elastică a barei se reflectă pe ramura principală *AB* a curbei elastice periodice. Se poate deduce uşor că punctul 0 al lamelei coincide cu punctul *A* de pe ramura principală, iar imaginea punctului de inflexiune — cu punctul *B*. Parametrii principali au valorile

$$\lambda_0'=\xi_0'=\eta_0'=0.$$

Observînd că segmentul 01 (fig. 3.50, *d*) este reflectat pe jumătatea din stînga a diagramei parametrilor elastici de către segmentul vertical (fig. 3.50, *c*) se observă că $\omega'=0$ şi $\zeta'=0$.

Folosind diagrama parametrilor elastici şi expresia coeficientului de forţă de similitudine: $\beta=\lambda_1-\lambda_0=\lambda_1'=1{,}84$, căruia îi corespunde în diagramă $\alpha=45°$.

Coordonatele $x_1$ şi $y_1$ ale capătului sînt date de relaţiile

$$x_1=\frac{\xi_1}{\beta}l \text{ şi } y_1=\frac{\eta_1}{\beta}l.$$

Parametrii elastici $\xi'$ şi $\eta'$ se află din diagramele parametrilor elastici şi au valorile: $\xi'=0{,}85$ şi $\eta'=1{,}41$.

Înlocuind cu valori se obține:

$$x_1 = \frac{0,85}{1,84} \times 80 = 37 \text{ mm};$$

$$y_1 = \frac{1,41}{1,84} \times 80 = 61,4 \text{ mm}.$$

În fig. 3.50, *e* este reprezentată forma liniei elastice a barei.

**Exemplul 4.** Să se determine forțele $P$ care, aplicate asupra capetelor unei lamele zvelte drepte, fac ca extremitățile ei să se atingă. Se cunosc: lungimea lamelei $2l=740$ mm, secțiunea $0,3\times 8=2,4$ cm² și faptul că este construită din oțel cu $E=2,1\times 10^6$.

*Rezolvare.* Deoarece bara prezintă simetrie față de mijlocul ei, se consideră numai jumătate din lamelă, și anume o lamelă încastrată la un capăt, care coincide cu mijlocul lamelei date, și liberă la celălalt capăt (fig. 3.51).

Sarcina acționează în lungul axei lamelei neîncărcate și are direcția permanent paralelă cu aceasta. Lamela astfel obținută se încadrează în clasa de bază stabilită de E. P. Popov.

Se poate deduce ușor că forma liniei elastice este cu inflexiune și că punctul de inflexiune coincide cu punctul de aplicație a forței $P$, unde momentul încovoietor este nul.

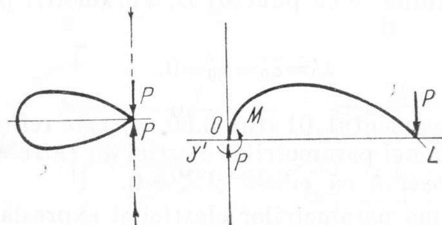



Fig. 3.51

Se alege sistemul de referință ca în figură.

Se observă că în origine $\frac{1}{\rho_0}<0$, curbura este negativă și $\zeta_0=0$.

Folosind tabela 3.3 rezultă că $\psi_0=\pi$.

Observînd că punctul 0 este un punct de compresiune, iar punctul 1 (capătul lamelei) este un punct de inflexiune se deduce că de la punctul



0 pînă la punctul 1 unghiul $\psi$ variază cu $\frac{\pi}{2}$, astfel că $\psi_1=\frac{3\pi}{2}$ și deci unghiul $\psi$ variază între limitele $\pi \leqslant \psi \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

Se observă că $\psi=\pi+\varphi$;

$$F(\psi) = 2F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F(\varphi); \text{ și } E(\psi) = 2E\left(\frac{\pi}{2}\right) + E(\varphi),$$

unde valorile lui $\varphi$ sînt cuprinse între 0 și $\frac{\pi}{2}$.

Avînd în vedere condițiile puse în enunț, așa cum rezultă și din figură, rezultă

$$x'_1 = x'_0 = 0.$$

Observînd că $s=l$ și $\psi=\psi_1$ se obține:

$$\frac{2}{\beta}\left[E(\Psi_1) - E(\Psi_0)\right] = 1,$$

$$\frac{2}{\beta}\left[3E\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2E\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 1$$

și deci $2E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \beta$.

Folosind relația parametrului $\beta$ pentru curbele fără inflexiune se poate scrie:

$$\beta = 3F\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2F\left(\frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2E\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

sau $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2E\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Aceasta este ecuația transcendentă pentru determinarea modulului $k$. Folosind tabelele pentru integralele eliptice complete se obține $\alpha \approx 65,4°$.

Rezultă $k=\sin\alpha=0,908$ și $\beta=F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2,323$ și

$$l\sqrt{\frac{P}{E'I}} = 2,323 \text{ sau } P = \frac{5,396E'I}{l^2}.$$

$$\text{Deci } P = \frac{5,396\,\dfrac{2,1\times 10^6}{1-0,3^2} \times \dfrac{0,3\times 8^3}{12}}{140^2} = 8,25 \text{ kgf}.$$

**Exemplul 5.** Să se dimensioneze un arc în foi suprapuse simetric, care să suporte o sarcină de lucru de 1 300 kgf, ştiind că distanţa dintre ochiurile arcului îndreptat este de 1 200, iar săgeata sub sarcina de lucru de 80 mm.

*Rezolvare.* Pentru simplificare se consideră un sfert de arc care are lungimea în stare îndreptată $l=600$ mm şi este încărcată la capăt cu sarcina $P=650$ kgf.

Momentul de inerţie total al secţiunii arcului

$$I_{tot}=B\frac{Pl^3}{3Ef},$$

se alege $B=1{,}35$.

Înlocuind cu valori se obţine

$$I_{tot}=1{,}35\,\frac{650\times 60^3}{3\times 2{,}1\times 10^6\times 8}=3{,}75\ \text{cm}^4.$$

Grosimea foii principale, alegînd o rezistenţă admisibilă $\sigma_{ai}=5\,000\,\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$, se determină cu relaţia

$$h=\frac{2\,\sigma_{ai}\,I_{tot}}{M_i}=\frac{2\times 5\,000\times 3{,}76}{650\times 60}=0{,}960\ \text{cm}.$$

Se alege secţiunea foii $9{,}6\times 60$ mm.

Momentul de inerţie al secţiunii unei foi

$$I=\frac{6\times 0{,}96^3}{12}=0{,}44\ \text{cm}^4.$$

Numărul de foi necesar

$$n=\frac{I_{tot}}{I}=\frac{3{,}76}{0{,}44}=8{,}55.$$

Prin rotunjire, $n=9$ foi.

Constructiv se stabileşte lungimea celei de-a doua foi egală cu lungimea foii principale. Tot constructiv se alege lungimea foii celei mai mici de 110 mm (lungimea totală, deci, 220 mm).

Pentru stabilirea lungimilor foilor intermediare se iau trepte egale între capetele foilor, deoarece foile au grosimi egale.

Rezultă:

$$\frac{600-110}{7}=70\ \text{mm}.$$



Lungimile foilor (pentru sfertul de arc) sînt următoarele: $l_1=600$ mm pînă la ochiul pentru legătură; $l_2=600$ mm; $l_3=530$; $l_4=460$ mm; $l_5=390$ mm; $l_6=320$ mm; $l_7=250$ mm; $l_8=180$ mm; $l_9=110$ mm.

Pentru determinarea valorilor maxime şi minime ale săgeţii se efectuează, pe baza formulelor indicate, calculele concentrate în tabela următoare:

| $k(1\ldots n)$ | $a_k$ cm | $I_k$ $\text{cm}^4$ | $Y_{k\,tot}$ $\text{cm}^4$ | $a_k^3$ $\text{cm}^3$ | $\frac{a_{k+1}^3-a_k^3}{Y_k}$ $\text{cm}^{-1}$ | $\frac{a_{k+2}^3-a_{k+1}^3}{Y_k}$ $\text{cm}^{-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0,44 | 0,44 | 0 | 0 | 780 |
| 2 | 0 | 0,44 | 0,88 | 0 | 390 | 2 740 |
| 3 | 7 | 0,44 | 1,32 | 343 | 1 830 | 4 950 |
| 4 | 14 | 0,44 | 1,76 | 2 744 | 3 700 | 7 220 |
| 5 | 21 | 0,44 | 2,20 | 9 261 | 5 870 | 9 500 |
| 6 | 28 | 0,44 | 2,64 | 21 952 | 7 950 | 11 900 |
| 7 | 35 | 0,44 | 3,08 | 42 875 | 10 200 | 14 000 |
| 8 | 42 | 0,44 | 3,52 | 74 088 | 12 400 | 27 800 |
| 9 | 49 | 0,44 | 3,96 | 117 649 | 16 500 | — |
| $l=60$ | | | | $l^3=216\,000$ | 58 840 | 78 890 |

Valoarea săgeţii minime

$$f_{min}=\frac{P}{3E}\sum_{k=1}^{9}\frac{a_{k+1}^3-a_k^3}{Y_k}=\frac{650}{3\times 2{,}1\times 10^6}\times 58\,840=6{,}1\ \text{cm}.$$

Săgeata maximă

$$f_{max}=\frac{P}{3E}\left[\sum_{k=1}^{8}\frac{a_{k+2}^3-a_{k+1}^3}{Y_k}+\frac{a_2^3}{Y_1}\right]=\frac{600}{3\times 2{,}1\times 10^6}\times 78\,890=8{,}15\ \text{cm}.$$

Săgeata arcului este cuprinsă între 6,1 şi 8,15 cm.

Săgeata are valoarea medie: $\frac{6{,}1+8{,}15}{2}=7{,}0625$ cm, astfel că abaterea faţă de săgeata prescrisă este de aproximativ 0,5 cm.

**Verificarea tensiunilor în foile scurte** (ultimele 3 foi). Extremităţile foilor se execută retezate după o dreaptă.

Rezultă $K=0$ și

$$\frac{l_9}{l_9-l_8}=\frac{110}{180-110}\ 1{,}57.$$

Folosind relațiile indicate pentru coeficienții $C_{n-1}$ și $C_{n-2}$ se obține:

$$C_8=1 \text{ și } C_7=0{,}98.$$

Momentele încovoietoare în ultimele trei foi:

$$M_7=\frac{M_i}{\dfrac{l_8}{C_8 l_7-l_8}+\sum\limits_{k=1}^{n-2}\dfrac{I_k}{I_{n-2}}}=\frac{650\times 60}{\dfrac{18}{0{,}96\times 25-18}+4}\approx 4\ 600 \text{ kgf}\cdot\text{cm};$$

$$M_8=M_7\frac{C_8 l_8-l_9}{C_8(C_7\cdot l_7-l_8)}=4\ 600\frac{1\times 18-11}{1\times(0{,}98\times 25-18)}\approx 4\ 800 \text{ kgf}\cdot\text{cm};$$

$$M_9=M_7\frac{l_9}{C_8(C_7\, l_7-l_8)}=4\ 600\frac{11}{1\,(0{,}98\times 25-18)}\approx 7\ 200 \text{ kgf}\cdot\text{cm}.$$

Ținînd seama de faptul că

$$W=\frac{bh^2}{6}=0{,}92.$$

Valorile eforturilor unitare:

$$\sigma_{1-7}\approx 4\ 700 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\sigma_7=\frac{M_7}{W}=\frac{4\ 600}{0{,}92}=5\ 000 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\sigma_8=\frac{M_8}{W}=\frac{4\ 800}{0{,}92}=5\ 200 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\sigma_9=\frac{M_9}{W}=\frac{7\ 200}{0{,}92}=7\ 800 \text{ kgf/cm}^2.$$

Alegînd $\varepsilon=0{,}005$, săgeata deformării probabile se determină cu relația:

$$f_0=\frac{l^2\varepsilon}{h}=\frac{60^2\times 0{,}005}{0{,}96}\approx 18 \text{ cm}.$$

Săgeata permanentă după deformarea prealabilă se consideră $\Delta f=7\%$ din $f_0$, adică $\Delta f=13$ mm.



Săgeata arcului neîncărcat $f_1=f_0+f$; unde $f_0$ este săgeata la sarcina totală a arcului și se poate alege $f_0=40$ mm.

Rezultă $f_1=f_0+f=40+80=120$ mm.

Săgeata arcului înainte de deformare prealabilă:

$$f_0'=f_1+\Delta f=120+13=133 \text{ mm}.$$

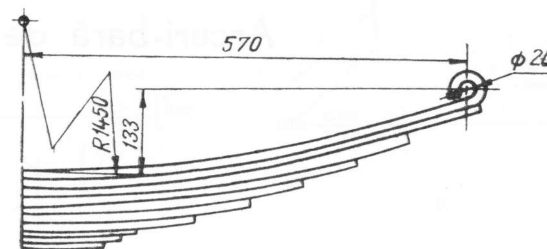



Fig. 3.52

Raza de curbură a foii principale este dată de relația:

$$R=\frac{l^2}{2\,f_0'-d},$$

în care $d$ este diametrul interior al ochiului arcului. Se poate alege $d=20$ mm. Înlocuind se obține:

$$R=\frac{60^2}{2\times 13{,}3-2}=1\ 450 \text{ cm}.$$

Semicoarda arcului asamblat este dată de relația:

$$L=\left(1-\frac{d}{2R}\right)\sqrt{l^2-\left(f_0'-\frac{d}{2}\right)^2}\approx 57 \text{ cm}.$$

În fig. 3.52 este reprezentată schița arcului căutat.

# 4

# Arcuri-bară de torsiune

Arcurile-bară de torsiune sînt elemente elastice formate din bare drepte, de regulă de secțiune constantă pe toată lungimea, care, sub sarcină, sînt solicitate de un moment de răsucire constant de-a lungul barei.

Din punct de vedere constructiv, arcul bară de torsiune simplu, ca element elastic, se realizează, în majoritatea cazurilor, în două variante: cu o singură pîrghie de încărcare la capătul liber simplu rezemat și o încastrare la celălalt capăt și cu două pîrghii de încărcare, cîte una la fiecare capăt, bara de torsiune propriu-zisă fiind simplu rezemată. În fig. 4.1, *a* și *b* sînt reprezentate schematic cele două variante constructive.

În anumite cazuri se folosesc și arcuri-bară de torsiune duble, compuse dintr-o bară de torsiune de secțiune circulară plină și o bară tubulară, exterioară primei bare. Cele două bare așezate coaxial lucrează ca două bare așezate în serie. Barele sînt legate rigid între ele la un capăt, prin caneluri (fig. 4.2).

Caracteristica arcului-bară de torsiune simplu, cu o pîrghie sau cu două pîrghii, este liniară în domeniul elastic al solicitărilor. Caracteristica arcului-bară de torsiune dublu este progresivă în trepte. Această variație a înclinării caracteristicii arcului se realizează prin modul de îmbinare prin caneluri a celor două bare. Pentru aceasta, la unul dintre capete, ambele bare sînt încastrate rigid prin caneluri, iar la celălalt capăt, și anume la acel prevăzut cu pîrghia de încărcare, barele sînt prevăzute cu caneluri conjugate, între care există însă un anumit joc



ce corespunde unghiului de răsucire în care bara tubulară lucrează singură cu o anumită rigiditate. După depășirea acestui joc lucrează la răsucire simultan ambele bare, astfel că arcul dublu are o rigiditate sporită. În fig. 4.3, *a* este reprezentat un astfel de arc și în fig. 4.3, *b* caracteristica sa.

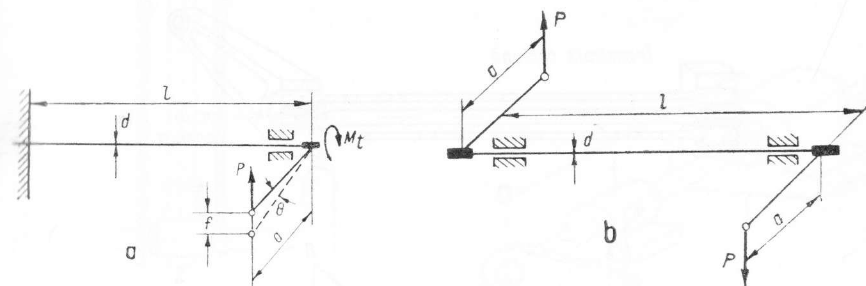



Fig. 4.1

Barele de torsiune se folosesc ca elemente elastice în construcția vagoanelor, autovehiculelor, la amortizarea suspensiilor. De asemenea, mai sînt utilizate ca element elastic în construcția cuplajelor cu jocuri

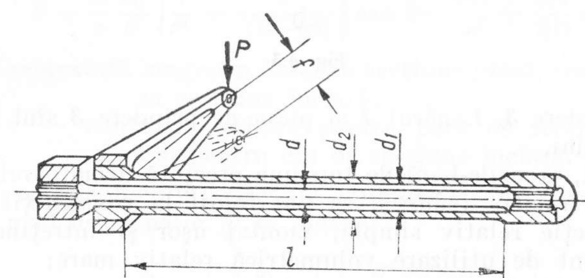


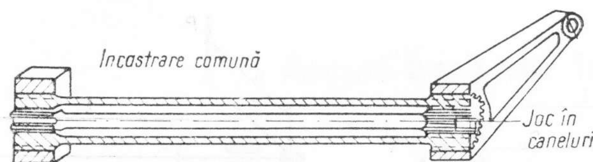

Fig. 4.2

rotaționale sau în dispozitive utilizate pentru măsurarea momentului motor.

În fig. 4.4 este reprezentată schematic folosirea a două arcuri-bară de torsiune la amortizarea oscilațiilor pendulare ale semiaxelor punții din spate ale unui autovehicul, care sînt montate paralel cu axa sa longitudinală.

În fig. 4.5 este reprezentată schema arcului-bară de torsiune utilizat la suspensia unui vagon.

Pîrghia de încărcare *2* este legată cu un capăt de cutia vagonului, iar în celălalt capăt este fixată prin caneluri de capătul barei de torsiune *1*, care se sprijină în lagărul *4* şi este montată prin caneluri în




a

b

Fig. 4.3

piesa de prindere *3*. Lagărul *4* şi piesa de prindere *3* sînt solidare cu şasiul boghiului.

În general, arcurile-bară de torsiune prezintă următoarele avantaje:
- gabarit relativ redus şi se pot folosi la construcţii capsulate;
- construcţie relativ simplă, montaj uşor şi întreţinere uşoară;
- coeficient de utilizare volumetrică relativ mare;
- lipsesc frecările interioare.

Ca dezavantaje trebuie remarcat faptul că, în general, necesită amortizoare de oscilaţii şi sistemul de prindere la capătul fix se deteriorează uşor.

Pentru calculul elementelor caracteristice principale ale arcului-bară de torsiune s-au concentrat în tabela 4.1 relaţiile de calcul în funcţie de forma secţiunii transversale folosite.

În cazul arcului-bară de torsiune dublu, format dintr-o bară de secţiune inelară şi o bară de secţiune circulară plină, aşezate în serie şi



montate rigid prin caneluri între ele, relaţiile de calcul pentru unghiul de răsucire şi pentru lucrul mecanic se obţin prin adunarea expresiilor respective, corespunzătoare barelor componente.

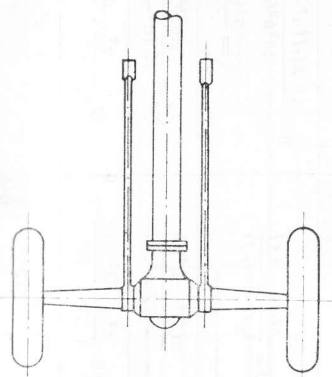


Fig. 4.4

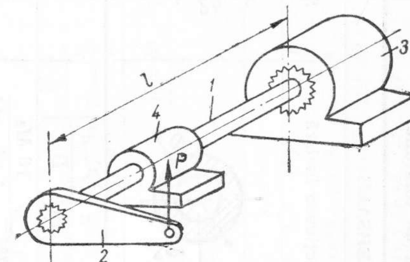



Fig. 4.5

Astfel, pentru unghiul de răsucire la capătul barei de torsiune se obţine relaţia:

$$\theta = \frac{32}{\pi}\frac{M_t}{G}\left[\frac{l}{d^4} + \frac{l'}{(D^4-d^4)}\right] \text{ sau } \theta = \frac{2\tau l}{Gd} + \frac{2\tau' l'}{GD}, \quad (4.1)$$

unde: $l$ şi $l'$ reprezintă lungimea barei cu secţiune plină, respectiv a barei cu secţiune inelară;
$\tau$ şi $\tau'$ — eforturile unitare pentru bara de secţiune circulară plină şi pentru cea de secţiune inelară.

Pentru expresia lucrului mecanic acumulat prin deformaţie se procedează în mod asemănător şi se obţine:

$$W = \frac{1}{4}\frac{\tau^2}{G}V + \frac{1}{4}\frac{\tau'^2}{G}\frac{D^2+d^2}{D^2}V', \quad (4.2)$$

unde $V$ şi $V'$ reprezintă volumele celor două bare.

Pentru uşurarea calculului barei de torsiune de secţiune dreptunghiulară se dau, în diagramele din fig. 4.6, valorile coeficienţilor $k_1$ şi $k_2$ în funcţie de mărimea raportului $\frac{a}{b}$.

Alegerea unui arc-bară de torsiune pe baza relaţiilor de calcul indicate în tabela 4.1 implică, de regulă, pentru stabilirea soluţiei celei

Tabela 4.1

**Relațiile de calcul ale arcului-bară de torsiune**

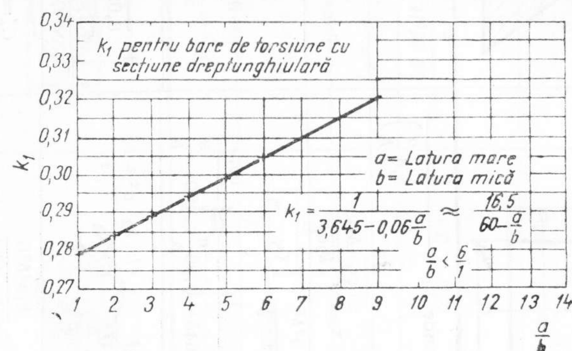
| Elementul de calcul | Simbol | FORMA SECȚIUNII TRANSVERSALE: Secțiunea circulară | Secțiunea inelară | Secțiunea eliptică |
|---|---|---|---|---|
| Momentul de rezistență polar | $W_p$ | $W_p=\frac{\pi d^3}{16}$ | $W_p=\frac{\pi}{16}\left[\frac{D^4-d^4}{D}\right]$ | $W_p=\frac{\pi ab^2}{16}$ |
| Efortul unitar maxim | $\tau_{max}$ | $\tau_{max}=\frac{16\ Pl}{\pi d^3}=\frac{16\ M}{\pi d^3}$ | $\tau_{max}=\frac{16\ M_t}{\pi\left[\frac{D^4-d^4}{D}\right]}$ | $\tau_{max}=\frac{16\ M_t}{\pi ab^2}$ |
| Momentul de inerție polar | $I_p$ | $I_p=\frac{\pi d^4}{32}$ | $I_p=\frac{\pi(D^4-d^4)}{32}$ | $I_p=\frac{\pi a^3b^3}{16\,(a^2+b^2)}$ |
| Unghiul de răsucire al capătului barei | $\theta$ | $\theta=\frac{M_tl}{I_pG}=\frac{2\tau l}{Gd}$ în rad. | $\theta=\frac{M_tl}{I_pG}=\frac{2\tau l}{GD}$ | $\theta=\frac{16\ M_tl\,(a^2+b^2)}{\pi a^3b^3G}=\frac{\tau l(a^2+b^2)}{a^2bG}$ |
| Rigiditatea arcului | $C'_r$ | $C'_r=\frac{M_t}{\theta}=\frac{\pi d^4}{32}\frac{G}{l}$ | $C'_r=\frac{\pi(D^4-d^4)G}{32\ l}$ | $C'_r=\frac{\pi a^3b^3G}{16\,(a^2+b^2)l}$ |
| Energia specifică acumulată | $W_0$ | $W_0=\frac{\tau^2}{4\ G}$ | $W_0=\frac{\tau^2}{4\ G}\cdot\frac{D^2+d^2}{D^2}$ | $W_0=\frac{\tau^2}{BG}\cdot\frac{a^2+b^2}{a^2}$ |
| Coeficientul de utilizare volumetrică | $\eta$ | $\eta=\frac{1}{4}$ | $\eta=\frac{1}{4}\ \frac{D^2+d^2}{D^2}$ | $\eta=\frac{1}{8}\ \frac{a^2+b^2}{a^2}$ |



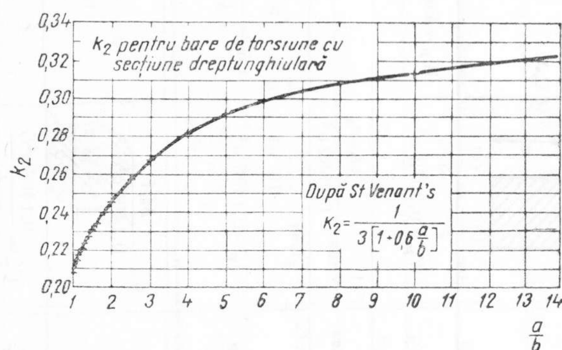
Tabela 4.1 (continuare)

| Elementul de calcul | Simbol | FORMA SECȚIUNII TRANSVERSALE: Secțiunea pătrată | Secțiunea dreptunghiulară | Secțiune triunghi echilateral |
|---|---|---|---|---|
| Momentul de rezistență polar | $W_p$ | $W_p=0{,}2082\ a^3$ | $W_p=k_2ab^2$, unde $k_2=\frac{1}{3\left(1+0{,}6\frac{a}{b}\right)}$ | $W_p=\frac{a^3}{20}$ |
| Efortul unitar maxim | $\tau_{max}$ | $\tau_{max}=\frac{M_t}{0{,}2082\,a^3}$ | $\tau_{max}=\frac{M_t}{k_2ab^2}$ | $\tau_{max}=M_t\frac{20}{a^3}$ |
| Momentul de inerție polar | $I_p$ | $I_p=0{,}1406\ a^4$ | $I_p=k_1\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}$ unde $k_1=\frac{1}{3{,}645-0{,}06\frac{a}{b}}\cong\frac{16{,}5}{60-\frac{a}{b}}$ | $I_p=0{,}02164\ a^4$ |
| Unghiul de răsucire al capătului barei | $\theta$ | $\theta=\frac{M_tl}{0{,}1406\,a^4G}=\frac{1{,}482\ \tau l}{Ga}$ | $\theta=\frac{M_tl}{Gk_1\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}}=\frac{\tau l}{G}\cdot\frac{k_2}{k_1}\cdot\frac{a^2+b^2}{a^2b}$ | $\theta=\frac{M_tl}{0{,}02164\,a^4G}=\frac{46{,}2M_tl}{a^4G}=\frac{2{,}31\tau l}{G_a}$ |
| Rigiditatea arcului | $C'_r$ | $C'_r=\frac{0{,}1406\,a^4G}{l}$ | $C'_r=\frac{k_1a^3b^3G}{(a^2+b^2)l}$ | $C'_r=\frac{Ga^4}{46{,}2\ l}$ |
| Energia specifică acumulată | $W_0$ | $W_0=\frac{\tau^2}{6{,}48\ G}$ | $W_0\cong\frac{\tau^2}{G}\ \frac{60\,a^2b+60\,b^3-a^3-ab^2}{297\,a^2b+356{,}4\,ab^2+106{,}92\,b^3}$ | $W_0=\frac{\tau^2}{7{,}5\ G}$ |
| Coeficientul de utilizare volumetrică | $\eta$ | $\eta=\frac{1}{6{,}48}$ | $\eta=\frac{60\,a^2b+60\,b^3-a^3-ab^2}{297\,a^2b+356{,}4\,ab^2+106{,}92\,b^3}$ | $\eta=\frac{1}{7{,}5}$ |

mai corespunzătoare, un calcul repetat şi destul de laborios. Pentru un calcul mai expeditiv şi uşor de realizat se utilizează nomograme. În fig. 4.7 se dă nomograma de calcul pentru arcurile-bară de torsiune cu secţiune circulară plină şi cu secţiune dreptunghiulară.




a




b

Fig. 4.6

Pentru lucru cu această nomogramă se utilizează diagrama reprezentată în fig. 4.8 pentru determinarea coeficienţilor $C_1$ pentru eforturi unitare şi $C_2$ pentru rigiditate în funcţie de raportul $\frac{a}{b}$ al laturilor secţiunii dreptunghiulare. Tot pentru secţiunile dreptunghiulare se utilizează o tabelă ajutătoare pentru valorile $a/b$ diferite de cele trecute pe nomogramă.

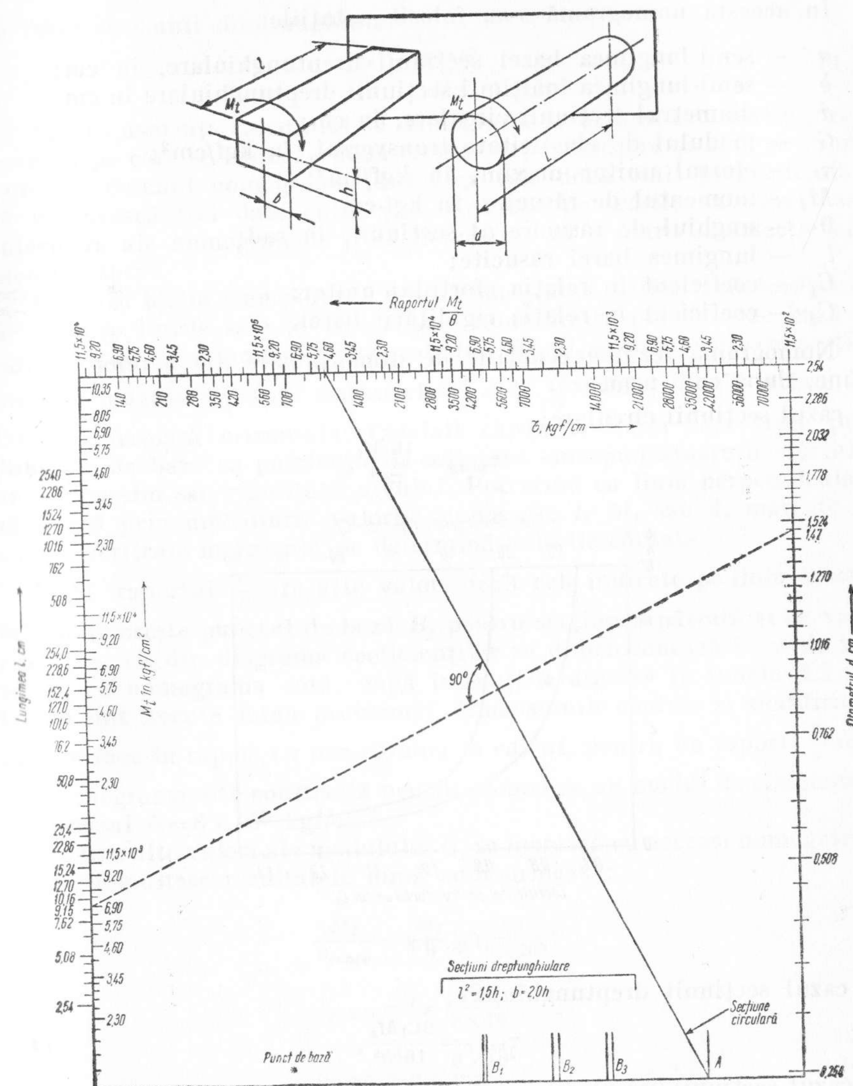



Fig. 4.7

În această nomogramă s-au folosit notațiile:

$a$ — semi-lungimea bazei secțiunii dreptunghiulare, în cm;
$b$ — semi-lungimea înălțimii secțiunii dreptunghiulare în cm;
$d$ — diametrul secțiunii circulare, în cm;
$G$ — modulul de elasticitate transversal, în kgf/cm²;
$\tau$ — efortul unitar maxim, în kgf/cm²;
$M_t$ — momentul de răsucire, în kgf·cm;
$\theta$ — unghiul de răsucire al secțiunii, în rad;
$l$ — lungimea barei răsucite;
$C_1$ — coeficient în relația efortului unitar;
$C_2$ — coeficient în relația rigidității barei.

Nomograma rezolvă ecuațiile de dimensionare ale barelor de torsiune, după cum urmează:

în cazul secțiunii circulare;

$$\tau_{max}=\frac{16\,M_t}{\pi d^3}, \tag{4.3}$$

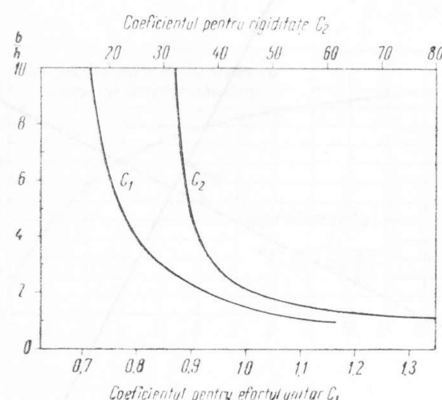



Fig. 4.8

în cazul secțiunii dreptunghiulare;

$$\tau_{max}=\frac{9C_1M_t}{16bh^2}, \tag{4.4}$$

în cazul secțiunii circulare;

$$\frac{M_t}{\theta}=\frac{G\pi d^4}{32l}, \tag{4.5}$$



în cazul secțiunii dreptunghiulare;

$$\frac{M_t}{\theta}=\frac{16l.b^3}{C_2 l}. \tag{4.6}$$

Pentru ușurința calculului cu nomograma se utilizează o hîrtie transparentă pe care se trasează două trepte perpendiculare și apoi se suprapune pe desenul nomogramei astfel ca cele două linii perpendiculare să întîlnească trei date cunoscute, stabilite pe scările exterioare sau interioare ale nomogramei, și să determine în a patra intersecție elementul căutat.

Se așază hîrtia transparentă peste nomogramă, astfel încît totdeauna una dintre liniile sale să treacă prin unul dintre punctele de bază $A$ corespunzător secțiunii circulare sau $B_1$, $B_2$, $B_3$ corespunzătoare secțiunilor rectangulare pentru rapoartele: $\frac{a}{b}=1$; $\frac{a}{b}=1{,}5$ și $\frac{a}{b}=2$, aflate pe latura inferioară orizontală. Celălalt capăt al liniei care trece prin punctele de bază se potrivește la valoarea corespunzătoare a efortului unitar maxim sau rigidității arcului. Potrivind ca linia perpendiculară să treacă prin una dintre valorile cunoscute $l$, $M_t$ sau $d$, marcate pe scările verticale marginale, se determină valorile căutate.

Dacă raportul $\frac{a}{b}$ are alte valori decît cele indicate pe linia orizontală se folosește punctul de bază $B_1$ pentru secțiunea pătrată și cu valorile $C_1$ și $C_2$ din diagrama coeficienților se dimensionează bara de torsiune, cu nomograma dată, după indicațiile arătate în tabela 4.2. În tabelă sînt trecute datele problemei, dimensiunile căutate și modificarea care se face în raport cu nomograma în calcul, pentru un raport $\frac{a}{b}$ dat.

Nomograma este construită pentru oțeluri cu un modul de elasticitate transversal $G=8\times10^5$ kgf/cm².

Pentru alte valori ale modulului $G_1$ se lucrează cu aceeași nomogramă, dar se înmulțesc rezultatele după cum urmează:

$$\frac{M_t}{\theta_{echiv}}=\frac{M_t}{\theta}\times\frac{G_1}{8\times10^5};$$

$$l_{echiv}=l\times\frac{G_1}{8\times10^5};$$

$$a_{echiv}=a\times\frac{8\times10^5}{G_1}; \tag{4.7}$$

$$d_{echiv}=d\times\left(\frac{8\cdot10^5}{G_1}\right)^{1/4}.$$

*Tabela 4.2*

**Tabelă ajutătoare pentru dimensionarea barei de torsiune**

| | | |
|---|---|---|
| *Cazul 1.* Se dă $\tau_{max}=\tau_a$ | Se cere să se determine $M_t$ sau $a$ | Se calculează $\tau_{max}=\frac{C_1}{1,608}\left(\frac{a}{b}\right)^2\tau_a$ În nomogramă se introduce $\tau'$ și se obțin rezultatele dorite |
| *Cazul 2.* Se dau $M_t$ și $a$ | Se cere efortul unitar $\tau_{max}$ | Se determină $\tau'_{max}$ obișnuit cu ajutorul nomogramei. Valoarea reală a efortului se determină calculînd: $\tau'_{max}=\frac{C_1}{1,608}\left(\frac{a}{b}\right)^2\tau_{max}$ |
| *Cazul 3.* Se dă $\frac{M_t}{\theta}$ | Se cere $a$ sau $l$ | Se calculează rigiditatea echivalentă $\left(\frac{M_t}{\theta}\right)'=\frac{1,285}{C_2}\left(\frac{b}{a}\right)^3\cdot\frac{M_t}{\theta}$ Cu această valoare se lucrează cu ajutorul nomogramei și se determină $b$ sau $l$ |
| *Cazul 4.* Se dau $a$ și $l$ | Se cere $\frac{M_t}{\theta}$ | Se determină rigiditatea cu ajutorul nomogramei $\frac{M_t}{\theta}$ Valoarea reală a ridigității se determină din relația: $\frac{M_t}{\theta}=\frac{1,285}{C_2}\left(\frac{b}{a}\right)^3\left(\frac{M}{\theta}\,l\right)'$ |

Nomograma indicată se poate folosi astfel pentru toate materialele cărora li se poate aplica legea lui Hooke.

**Exemplu de calcul.** Un arc-bară de torsiune (fig. 4.9) trebuie să înmagazineze o energie de deformație maximă $W=900$ kgf.cm și să obțină o deformație unghiulară maximă de 15°. Să se dimensioneze acest arc, astfel ca $\tau_a$ să nu depășească valoarea de 3 000 kgf/cm².

Să se verifice la oboseală în ipoteza că momentul de răsucire variază ciclic cu un coeficient de asimetrie $R=0,4$ și că se folosește ca material oțel Arc 4, STAS 795-62, iar suprafața barei urmează să fie rectificată fin.



*Rezolvare.* Valoarea momentului de răsucire:

$$M_t=\frac{2W}{\theta}=\frac{2\times 900}{\frac{15\times 2}{360}}=6\ 750\ \text{kgf}\cdot\text{cm}.$$

Diametrul barei:

$$d=\sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi\tau_a}}=\sqrt[3]{\frac{16\times 6\ 750}{\pi\times 3\ 000}}=2,3\ \text{cm}.$$

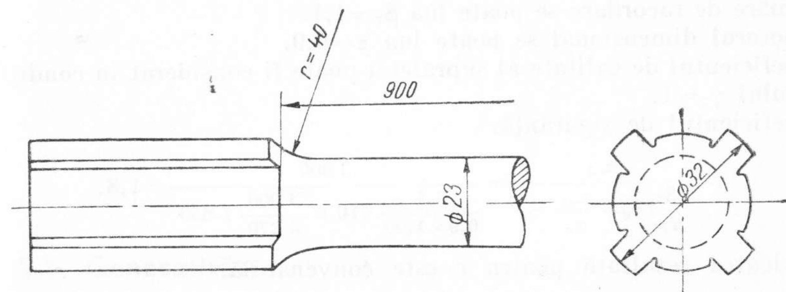



Fig. 4.9

Lungimea utilă a arcului:

$$l=\frac{\pi d^4 G\theta}{32M_t}=\frac{\pi\times 2,3^4\times 8,3\times 10^5\times 0,274}{32\times 6\ 750}=90\ \text{cm}.$$

**Verificarea la oboseală.** Efortul unitar maxim de răsucire:

$$\tau_{max}=\frac{M_{tmax}}{W_p}=\frac{6\ 750}{\frac{\pi}{16}\times 2,3^3}=2\ 360\ \text{kgf/cm}^2.$$

Efortul unitar minim:

$$\tau_{min}=R\tau_{max}=0,4\times 2\ 360=940\ \text{kgf/cm}^2.$$

Efortul unitar mediu de răsucire;

$$\tau_m=\frac{\tau_{max}+\tau_{min}}{2}=\frac{2\ 360+940}{2}=1\ 650\ \text{kgf/cm}^2.$$

Amplitudinea efortului unitar mediu de răsucire:

$$\tau_v=\frac{\tau_{max}-\tau_{min}}{2}=\frac{2\ 360-940}{2}=710\ \text{kgf/cm}^2.$$

Pentru oțelul Arc 4, STAS 795-62 se poate lua:

$$\sigma_c = 11\ 000 \text{ kgf/cm}^2 \text{ (limita de curgere)},$$
$$\tau_{-1} = 3\ 000 \text{ kgf/cm}^2.$$

Limita de curgere la răsucire:

$$\tau_c = 0,57\ \sigma_c = 0,57 \times 11\ 000 = 6\ 270 \text{ kgf/cm}^2.$$

Coeficientul efectiv de concentrare a eforturilor unitare pentru o rază mare de racordare se poate lua $\beta_\tau = 1,1$.

Factorul dimensional se poate lua $\varepsilon = 0,9$.

Coeficientul de calitate al suprafeței poate fi considerat în condițiile enunțului $\gamma_\tau = 1$.

Coeficientul de siguranță:

$$c = \frac{\tau_{-1}}{\frac{\beta_\tau}{\varepsilon\gamma_\tau}\tau_v + \frac{\tau_{-1}}{\tau_c}\tau_m} = \frac{3\ 000}{\frac{1,1}{0,9 \times 1,00}710 + \frac{3\ 000}{6\ 270}1\ 650} = 1,8.$$

Valoarea rezultată pentru $c$ este convenabilă.

# 5

# Arcuri spirale

## 5.1. Generalități

Arcul spiral se folosește în marea majoritate a cazurilor ca motor de antrenare a mecanismelor relativ fine, cum sînt: mecanismele de orologie, mecanismele de comandă, mecanismele aparatelor de măsură și mecanismele unor aparate electrotehnice.

Arcul spiral folosit ca motor de antrenare se caracterizează prin faptul că solicitările pot fi considerate relativ constante în timp. În fig. 5.1 este reprezentată schema unui arc spiral. Capătul interior al arcului este legat de un ax (fus), iar capătul exterior de corpul aparatului sau de o casetă în interiorul căreia se plasează tot arcul spiral.

Arcul spiral este solicitat la încovoiere, efectul practic al acestei solicitări traducîndu-se într-un moment de răsucire la fus.

Cînd arcul se armează, axul se rotește în raport de corp sau de casetă pînă cînd spirele se strîng pe el. Arcul armat are o anumită energie potențială. Dacă arcul este lăsat liber, el este capabil să execute un lucru mecanic rotind tamburul sau axul ansamblului. Arcul spiral se caracterizează în primul rînd prin faptul că acumulează o energie relativ mare într-un gabarit mic, are o rigiditate relativ mică, corespunzătoare modului său de funcționare. Fiind solicitat de forțe care acționează timp îndelungat, se poate considera că are practic un caracter static.

Datorită variației în timp relativ mic a valorii momentului de răsucire realizat, cum și a posibilităților de a realiza o mișcare de rotație,

aproape uniformă, dacă se folosesc anumite dispozitive auxiliare pentru uniformizarea acesteia, arcul spiral poate antrena mecanisme care nu necesită sarcini mari pentru punerea lor în mișcare.

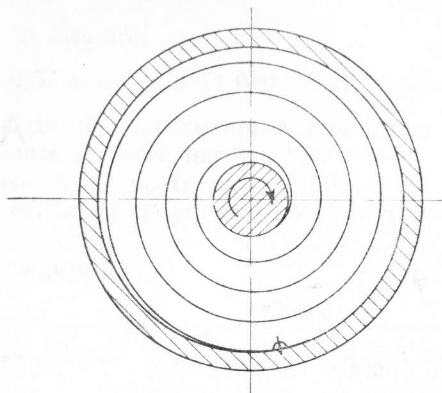


Fig. 5.1

Arcul spiral propriu-zis are forma unei panglici înfășurate după o spirală. În mod curent se folosește spirala lui Arhimede, a cărei ecuație încoordonate polare este următoarea:

$$r=\frac{h}{\pi}\theta, \tag{5.1}$$

în care:

$r$ este raza vectoare;
$\theta$ — unghiul polar;
$h$ — grosimea benzii.

Arcul are aproape pe toată lungimea sa, forma spirală. Prinderea arcului la cele două capete se realizează fie prin încastrare, fie prin articulație. La capete, forma arcului se abate de la spirală. La mecanismele de precizie, forma capetelor arcului are o mare importanță, constituind obiectul unui studiu amănunțit. Formele porțiunilor de capăt ale arcului spiral au primit numele de curbele lui Philips și satisfac anumite condiții, numite condițiile lui Philips. Acestea sînt:

centrul de greutate al curbei de capăt trebuie să se afle pe perpendiculara dusă din originea curbei;

distanța de la centrul de greutate pînă la fus trebuie să fie egală cu $\frac{\rho^2}{l_1}=D$,



în care:

$\rho$ este raza de curbură a spiralei;
$l_1$ — lungimea curbei de capăt;
$D$ — diametrul mare al spiralei.

Satisfac aceste condiții:

— o dreaptă dusă sub un unghi $\alpha=24°28'$ față de orizontala axei (fig. 5.2, *a*);

— două sferturi de cerc racordate prin dreapta $AA_1$ (fig. 5.2, *b*);

— un arc de cerc cu raza $R=0{,}827\ \rho$, unde $\rho$ este raza de curbură a spiralei (fig. 5.2, *c*);

— un arc de elipsă cu semiaxa mică $b=0{,}67\ R$ și semiaxa mare $a=R$, unde $R=0{,}827\ \rho$ (fig. 5.2, *d*).

Modul de fixare al capătului interior este mai puțin important decît al celui exterior, el trebuind să asigure numai o transmisiune sigură a

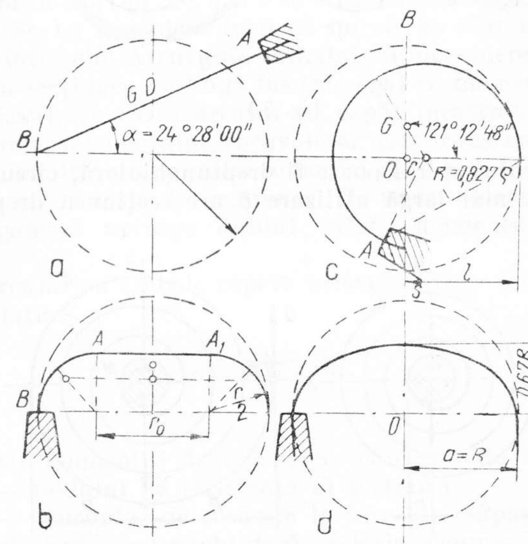



Fig. 5.2

momentului de la arc pînă la ax. Trebuie acordată o atenție deosebită modului de prindere, deoarece o prindere necorectă a capătului poate produce ruperea arcului, întrucît în acest loc apar deformările cele mai mari, deci eforturile cele mai mari, din arc.

În fig. 5.3, *a—g* sînt reprezentate diferite moduri de fixare a capătului interior al arcului a căror alegere depinde de diferite considerente tehnologice, precum și de asigurarea fixării.

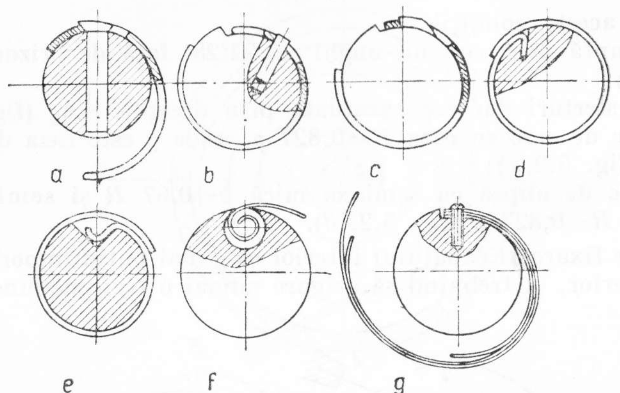



Fig. 5.3

Secțiunea arcului spiral poate fi dreptunghiulară, circulară, eliptică sau inelară. Cea mai largă utilizare o are secțiunea dreptunghiulară.

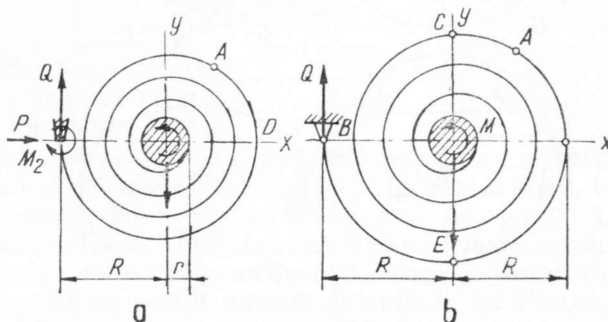



Fig. 5.4

După modul de funcționare al carcasei sau al fusului, arcurile spirale se pot clasifica în: arcuri spirale cu carcasă mobilă și fusul fix și arcuri spirale cu carcasa fixă și fusul mobil.



După modul de funcționare, se deosebesc: arcuri cu număr mare de spire, cu frecare între spire sau fără frecare între spire și arcuri cu număr mic de spire.

Un criteriu de clasificare îl constituie și materialul din care este executat arcul. Din acest punct de vedere arcurile spirale pot fi din oțel sau din metale neferoase. De asemenea, arcurile pot avea capătul încastrat (fig. 5.4, *a*) sau articulat (fig. 5.4, *b*). De modul de prindere al capătului arcului se ține seamă la calculul de dimensionare.

## 5.2. Considerații teoretice. Relații de calcul

### 5.2.1. Arcuri spirale cu număr mare de spire

Arcurile spirale din fig. 5.4, *a* și *b* se dimensionează pe baza calculului de încovoiere. Se va considera întîi că spirele nu sînt în contact și nu există frecare între ele. Arcul este solicitat la încovoiere, iar momentul încovoietor din secțiunea de lîngă fus este egal cu momentul de răsucire care solicită fusul. În cazul arcului cu capăt încastrat (fig. 5.4, *a*) în carcasă, valoarea momentului încovoietor este constantă de-a lungul spirei arcului, iar în cazul arcului articulat (fig. 5.4, *b*) această valoare este variabilă și maximă în secțiunea *D*, unde valoarea momentului încovoietor egalează aproape dublul valorii momentului de răsucire din fus.

În cazul arcului cu ambele capete încastrate (fig. 5.5) efortul unitar este dat de relația:

$$\sigma_i = \frac{M_i}{W} = \frac{M_t}{W}, \tag{5.2}$$

în care:

$M_i$ este momentul de încovoiere care solicită secțiunea;
$W$ — modulul de rezistență al secțiunii;
$M_t$ — momentul de răsucire la care este supus arcul.

Pentru secțiunea dreptunghiulară, relația devine:

$$\sigma_i = \frac{6\,M_t}{bh^2}, \tag{5.3}$$

în care:

$b$ este lățimea benzii arcului;
$h$ — grosimea benzii arcului,

de unde

$$h=\sqrt{\frac{6\,M_t}{b\,\sigma_i}}. \tag{5.4}$$

În cazul arcului cu capătul de la carcasă articulat, momentul încovoietor este variabil cu secţiunea, valoarea maximă fiind:

$$M_{i\ max}=\left(1+\frac{R-\alpha\pi}{R}\right)M_t, \tag{5.5}$$

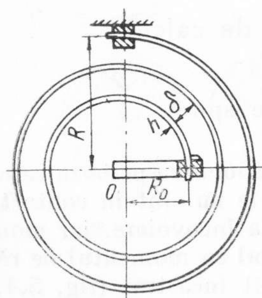


Fig. 5.5

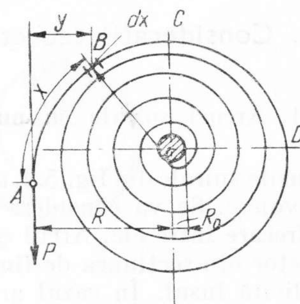


Fig. 5.6

iar efortul unitar corespunzător:

$$\sigma_{max}=\frac{M_{i\ max}}{W}\pm\frac{M_t}{RA}, \tag{5.6}$$

unde $R$ este raza interioară a casetei sau raza maximă la capătul, la carcasă;
$A$ — aria secţiunii benzii.

Termenul $\alpha$ se determină cu relaţia:

$$\alpha=\frac{h+\delta}{2\pi},$$

în care: $\delta$ este distanţa dintre spirele arcului.

Deformaţia arcului spiral se caracterizează prin unghiul de rotire al fusului sau prin variaţia unghiului de înfăşurare. Pentru a determina relaţiile de deformare, se consideră o secţiune oarecare $B$ aflată de capătul $A$ la distanţa $AB=x$, măsurată pe spirală (fig. 5.6). În $B$ se consideră un element de arc de lungimea $dx$.



Relaţia generală de încovoiere, corespunzătoare momentului într-o secţiune oarecare $B$, este următoarea:

$$M_i=M_t=Py=EI\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right), \tag{5.7}$$

în care: $P$ este forţa care acţionează în capătul arcului pentru a echilibra momentul de răsucire din arc;
$\rho$ — raza de curbură a elementului de arc după deformare;
$\rho_0$ — raza de curbură iniţială a elementului de arc.

Pe baza relaţiilor:

$$\frac{1}{\rho_0}=\frac{d\theta_0}{dx}\ \text{şi}\ \frac{1}{\rho}=\frac{d\theta}{dx} \tag{5.8}$$

se obţine:

$$Py=EI\left(\frac{d\theta}{dx}-\frac{d\theta_0}{dx}\right), \tag{5.9}$$

de unde:

$$d\theta_1=d\theta-d\theta_0=\frac{Pydx}{EI}; \tag{5.10}$$

sau:

$$\theta_1=\int_0^l\frac{Pydx}{EI}=\frac{M_tl}{EI}\ [\text{rad}]; \tag{5.11}$$

$$\theta_1^\circ=\frac{180}{\pi}\cdot\frac{M_tl}{EI}\,[\text{grd}], \tag{5.12}$$

în care: $\theta$ este unghiul la centru al arcului de spirală de lungime $x$ între secţiunile $A$ şi $B$ după strîngerea arcului;
$\theta_0$ — unghiul la centru al arcului de spirală de lungime $x$ în poziţia iniţială desfăcută;
$d\theta$ — unghiul la centru al elementului de arc de lungime $dx$ după strîngerea arcului;
$d\theta_0$ — unghiul la centru al elementului de arc de lungime $dx$ în poziţia iniţială desfăcută;
$l$ — lungimea spiralei arcului;
$\theta_1$ — unghiul cu care se înfăşoară întreg arcul sub acţiunea momentului de răsucire $M$ corespunzător unghiului de rotire al fusului.

La efectuarea integrării, s-a ţinut seama că $M_t$, $E$ şi $I$ sînt constante. Pentru secţiunea dreptunghiulară, expresia devine:

$$\theta_1^\circ=\frac{180}{\pi}\cdot\frac{12l}{Ebh^3}M_t=\frac{180}{\pi}\cdot\frac{2l}{Eh}\sigma. \tag{5.13}$$

Lucrul mecanic de deformație:

$$L=M_{max}\frac{\theta_1}{2}=\frac{1}{2}M_t\theta_1=\frac{1}{2}\frac{l}{E}\frac{M^2}{I}=\frac{1}{2}\frac{lW^2\sigma^2}{EI}. \qquad (5.14)$$

Pentru arcul spiral cu secțiunea dreptunghiulară:

$$L=\frac{1}{6}\frac{V}{E}\sigma^2. \qquad (5.15)$$

Coeficientul de utilizare volumetrică este $\eta'=\frac{1}{6}$.

În cazul capătului articulat la casetă, expresia unghiului de înfășurare devine:

$$\theta=\frac{M_t}{IE}\left\{\frac{1}{8R^2\alpha}\left[R^4-R_0^4-2\left(\sin^2\frac{R}{\alpha}-\cos^2\frac{R_0}{\alpha}\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(R^3\sin^2\frac{R}{\alpha}-R_0^3\sin^2\frac{R_0}{\alpha}\right)\right]+1\right\}, \qquad (5.16)$$

*Tabela 5.1*

**Relații de calcul pentru arcul spiral**

| Secțiunea | Efortul unitar | Unghiul de rotație | Lucrul mecanic | Coeficientul de utilizare volumetrică, $\eta$ |
|---|---|---|---|---|
| Oarecare | $\sigma=\frac{M_t}{W}$ | $\theta_1=\frac{M_t l}{EI}=\frac{lW}{EI}\sigma$ | $L=\frac{1}{2}M_t\theta=\frac{1}{2}\frac{l}{E}\frac{W^2\sigma^2}{I}$ | |
| Dreptunghiulară | $\sigma=\frac{6}{bh^2}M_t$ | $\theta_1=\frac{12\,lM_t}{Ebh^3}=\frac{2\,l}{Eh}\sigma$ | $L=\frac{1}{6}\frac{V\sigma^2}{E}$ | $\frac{1}{6}$ |
| Circulară | $\sigma=\frac{10{,}18}{d^3}M_t$ | $\theta_1=\frac{20{,}36}{E}\frac{l}{d^4}M_t=\frac{2\,l}{Ed}\sigma$ | $L=\frac{1}{8}\frac{V\sigma^2}{E}$ | $\frac{1}{8}$ |
| Eliptică | $\sigma=\frac{32}{ab^2}M_t$ | $\theta_1=\frac{64}{\pi}\frac{M_t l}{Eab^3}=\frac{2\sigma l}{Eb}$ | $L=\frac{1}{8}\frac{V\sigma^2}{E}$ | $\frac{1}{8}$ |



în care: $R_0$ este raza fusului sau raza minimă la capătul arcului, la fus.
În cazul secțiunii dreptunghiulare

$$I=\frac{bh^3}{12};\quad W=\frac{bh^2}{6}.$$

Calcule analoge se pot efectua și în cazul secțiunilor pătrate, circulare, eliptice etc. Rezultatele respective sînt redate în tabela 5.1.

### 5.2.2. Arcuri spirale plane cu număr mic de spire

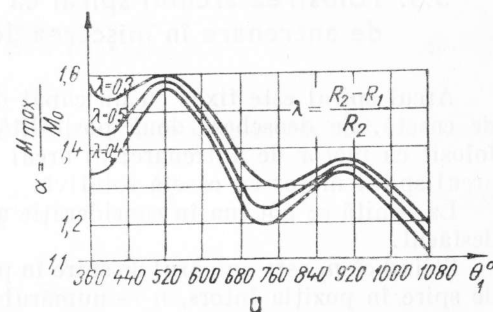
Un caz particular al arcurilor spirale plane îl constituie cazul întîlnit în practică al arcurilor spirale plane cu număr mic de spire. Aceste arcuri se execută din benzi de secțiune mare și sînt folosite în industrie pentru a transmite momente mari.

Relațiile care rezultă sînt relativ complicate, astfel încît se recurge deseori la relațiile simple de încovoiere (5.3) și deformație (5.12), în care se introduc coeficienți de corecție:

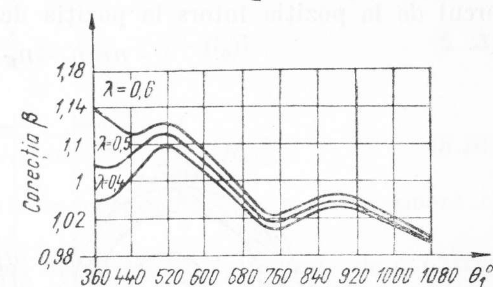
$$\sigma_\tau=\alpha\frac{M_0}{W};\quad \theta_1=\frac{M_0 l}{\beta EI}, \qquad (5.17)$$

unde $M_0$ este momentul de răsucire la fus. Coeficienții $\alpha$ și $\beta$ rezultă din diagramele din fig. 5.7, *a* și *b*, în funcție de unghiul $\theta_1$ și de parametrul

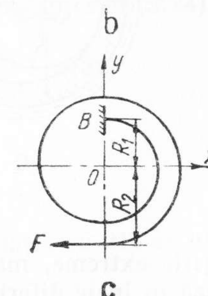
$$\lambda=\frac{R_2-R_1}{R_2}, \qquad (5.18)$$



a



b



c

Fig. 5.7

în care:

$R_2$ este raza cea mai mare a spiralei;

$R_1$ — raza cea mai mică a spiralei (fig. 5.7, *c*).

Diagramele sînt valabile numai pentru arcul cu număr redus de spire şi numai pentru bandă de grosime mică.

## 5.3. Folosirea arcului spiral ca motor de antrenare în mişcarea de rotaţie

Arcul spiral este fixat cu un capăt de fus, iar cu celălalt este fixat de casetă. Se deosebesc două posibilităţi de montare a arcului spiral folosit ca motor de antrenare; a) arcul spiral motor cu casetă fixă; b) arcul spiral motor cu casetă rotativă.

La limită se pot lua în consideraţie arcul spiral strîns şi arcul spiral desfăcut.

Ştiind că $n_1$ este numărul de spire în poziţia desfăcut şi $n_2$ — numărul de spire în poziţia întors, $n$ — numărul de rotaţii pe care le generează arcul de la poziţia întors la poziţia desfăcut se determină cu relaţia:

$$n = n_2 - n_1. \tag{5.19}$$

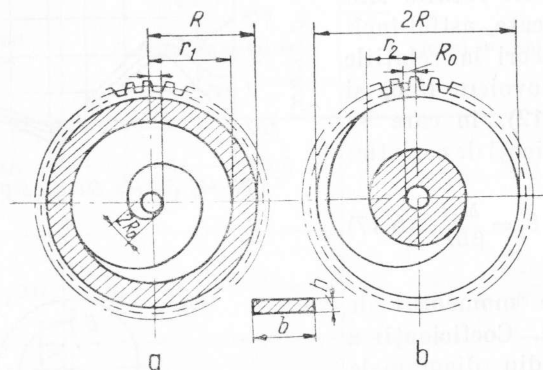



Fig. 5.8

În poziţiile extreme, materialul arcului (spirele sale aflate în contact) se aşază în inele diferite: la poziţia desfăcut în contact cu carcasa (fig 5.8, *a*); la poziţia strîns — în contact cu fusul (fig. 5.8, *b*).



Volumul arcului fiind neschimbat, se poate scrie cu aproximaţie:

$$\frac{\pi}{4}(R^2 - r_1^2) = \frac{\pi}{4}(r_2^2 - R_0^2), \tag{5.20}$$

unde: $R$ este raza interioară a carcasei;

$r_1$ — raza interioară a arcului desfăcut;

$r_2$ — raza exterioară a arcului întors.

Făcînd calculul se obţine:

$$r_2 = \sqrt{R^2 + R_0^2 - r_1^2}, \tag{5.21}$$

unde $R_0$ este raza fusului.

În ipoteza că, în poziţiile extreme, spirele sînt în contact, se poate scrie:

$$n_1 = \frac{R - r_1}{h}; \; n_2 = \frac{r_2 - R_0}{h}, \tag{5.22}$$

unde $h$ este grosimea benzii.

Înlocuind în relaţia (5.19) se obţine:

$$n = n_2 - n_1 = \frac{1}{h}\,[r_1 + r_2 - (R + R_0)] \tag{5.23}$$

sau

$$n = \frac{1}{h}\left[\sqrt{R^2 + R_0^2 - r_1^2} + r_1 - (R + R_0)\right]. \tag{5.24}$$

În această expresie, variabila independentă este raza interioară $r_1$ a arcului desfăcut.

Problema importantă la arcul de antrenare spiral este de a obţine un număr maxim de rotaţii. Anulînd derivata expresiei (5.24), se obţine:

$$\frac{dn}{dr_1} = \frac{1}{h}\left[2\,\frac{-2r_1}{\sqrt{R^2 + R_0^2 - r_1^2}} + 1\right] = 0, \tag{5.25}$$

de unde:

$$r_1 = \sqrt{\frac{R^2 + R_0^2}{2}}. \tag{5.26}$$

Dacă se introduce această valoare în relaţia (5.21) se obţine:

$$r_2 = \sqrt{\frac{R^2 + R_0^2}{2}} = r_1. \tag{5.27}$$

Deci cînd raza exterioară a arcului întors va fi egală cu raza interioară a arcului desfăcut, se obţine un număr maxim de rotaţii. Numărul de rotaţii maxim:

$$n=\frac{1}{h}\left[\sqrt{2(R^2+R_0^2)}-(R+R_0)\right]. \tag{5.28}$$

Pentru lungimea arcului se poate folosi relaţia aproximativă:

$$l=2\pi\frac{R+r_1}{2}n_1+2\pi R_0, \tag{5.29}$$

în care lungimea spirei medii se înmulţeşte cu numărul de spire, pentru a se obţine lungimea arcului. Termenul al doilea reprezintă lungimea curbei de capăt. La realizarea practică a acestor arcuri se ia constructiv $R_0=\frac{R}{3}$, cu care se obţine cu relaţia (5.28):

$$n=0{,}157\frac{R}{h}=0{,}472\frac{R_0}{h}. \tag{5.30}$$

Grosimea $h$ a arcului se ia constructiv în raport cu grosimea fusului

$$h\leqslant\frac{R_0}{15}. \tag{5.31}$$

În poziţia lui liberă, înainte de a fi introdus în tobă, arcul are un număr de $n$ spire care nu vor participa la generarea momentului $M$. Pentru a introduce arcul în tobă, el trebuie răsucit cu $n_1-n'$ rotaţii. Constructiv se ia $n'=(0{,}38\ldots0{,}30)\cdot n_2$.

Valorile extreme ale unghiului de rotaţie sînt date de relaţiile:

$$\theta_{max}=2\pi(n_2-0{,}35n_2);\quad \theta_{min}=2\pi(n_1-0{,}35n_2). \tag{5.32}$$

Pornind de la relaţia

$$M=\frac{EI}{l}\theta, \tag{5.33}$$

rezultă:

$$M_{max}=\frac{EI}{l}2\pi(n_2-0{,}35n_2);\quad M_{min}=\frac{EI}{l}2\pi(n_1-0{,}35n_2). \tag{5.34}$$



Pentru o poziţie intermediară a arcului, se înseamnă cu $n_0$ numărul curent de rotaţii ale carcasei

$$0\leqslant n_0\leqslant n;\quad n=n_2-n_1. \tag{5.35}$$

Se obţine:

$$M=\frac{EI}{l}2\pi(n_1-0{,}35n_2+n_0), \tag{5.36}$$

care la limită dă tocmai valorile maxime şi minime.

Rezultă că, teoretic, între valoarea momentului şi numărul de rotaţii există o relaţie liniară. În condiţiile reale de funcţionare a arcului nu se observă o dependenţă liniară completă. În fig. 5.9 se arată comparativ diagrama teoretică şi diagrama reală.

În regiunile $OD$ şi $EF$ ale diagramei momentului, variaţia nu este liniară, deoarece intervin frecări între spirele arcului. În regiunea $DE$ variaţia este liniară şi arcul poate fi considerat ca un arc liber cu coeficient unghiular constant

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{M}{\theta}=\frac{EI}{l}. \tag{5.37}$$

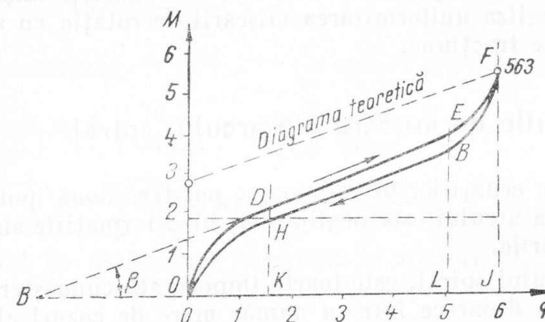



Fig. 5.9

Randamentul arcului spiral motor rezultă din diagrama momentului

$$\eta=\frac{\text{aria suprafeţei } OHBFJ}{\text{aria suprafeţei } ODEFJ}.$$

Randamentul arcului spiral depinde de pierderile prin histerezis ale materialului, de calitatea prelucrării suprafeţei arcului, de sistemul

de ungere, de sistemul de fixare al arcului de fus. În mod curent se realizează $\eta=0,8\ldots0,85$. Pentru arcuri de ceasornice s-a realizat $\eta=0,65\ldots0,8$.

La folosirea arcului spiral ca mijloc de antrenare, datorită variaţiei valorii momentului, mişcarea îşi pierde caracterul de mişcare uniformă.

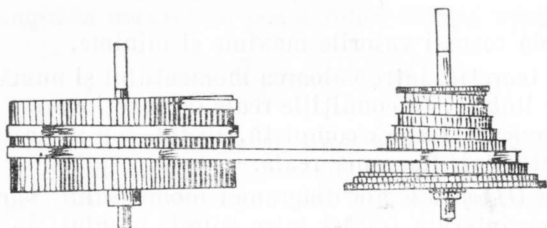


Fig. 5.10

Pentru corijare, se pot folosi diferite sisteme, cum ar fi cuplarea a două arcuri succesive sau corijarea prin melc cu lanţ de tracţiune.

În fig. 5.10 este reprezentat modul de corijare a mişcării date de arc pentru a realiza uniformizarea mişcării de rotaţie cu ajutorul unui melc cu lanţ de tracţiune.

## 5.4. Ecuaţiile de mişcare ale arcului spiral

La stabilirea ecuaţiilor de mişcare se pot face două ipoteze simplificatoare: a) masa arcului este neglijabilă; b) deformaţiile sînt proporţionale cu solicitările.

În cazul arcului spiral, este foarte importantă cunoaşterea ecuaţiilor sale de mişcare, deoarece într-un număr mare de cazuri el este folosit ca motor de antrenare.

Dacă se notează deformaţia şi momentul maxim cu $\theta_{max}$ şi $M_{max}$, în cazul unui arc determinat, aceste două valori sînt constante şi bine stabilite. Unei poziţii intermediare, la un timp dat, îi corespunde un moment $M_x$ şi o deformaţie $\theta_x$.

Pe baza ipotezei a doua se poate scrie:

$$M_x=M_{max}\frac{\theta_{max}-\theta_x}{\theta_{max}}. \qquad (5.38)$$



Dacă se notează cu $\omega_x$ viteza unghiulară instantanee a fusului sau a carcasei antrenate de arc, în poziţia intermediară menţionată, pe baza teoremei energiei se poate scrie relaţia:

$$\frac{1}{2}I\omega_x^2=\int_0^{\theta_x}M_x d\theta_x=\int_0^{\theta_x}M_{max}\frac{\theta_{max}-\theta_x}{\theta_{max}}\,d\theta=M_{max}\left(\theta_x-\frac{\theta_x^2}{2\theta_{max}}\right). \qquad (5.39)$$

Din relaţia (5.39), rezultă:

$$\omega_x=\sqrt{\frac{2M_{max}}{I}\left(\theta_x-\frac{\theta_x^2}{2\theta_{max}}\right)}\,. \qquad (5.40)$$

Foarte importantă pentru nevoile practicii este cunoaşterea timpului de desfăşurare a arcului în mecanismele cu arc motor. Ştiind că

$$\omega_x=\frac{d\theta_x}{dt} \qquad (5.41)$$

şi ţinînd seama de relaţia (5.40),

$$dt=\frac{d\theta_x}{\sqrt{\frac{2M_{max}}{I}\left(\theta_x-\frac{\theta_x^2}{2\,\theta_{max}}\right)}}=\sqrt{\frac{I\theta_{max}}{M_{max}}}\,\frac{d\theta_x}{\sqrt{2\,\theta_{max}\,\theta_x-\theta_x^2}}\,. \qquad (5.42)$$

Prin integrare se obţine:

$$t_x=\sqrt{\frac{I\theta_{max}}{M_{max}}}\,\arcsin\left(\frac{\theta_x-\theta_{max}}{\theta_{max}}\right), \qquad (5.43)$$

$$t_x=\sqrt{\frac{I\theta_{max}}{M_{max}}}\,\arccos\left(1-\frac{\theta_x}{\theta_{max}}\right). \qquad (5.44)$$

Pentru timpul de desfăşurare completă a arcului, $\theta_x=\theta_{max}$ şi se obţine:

$$\omega=\sqrt{\frac{M_{max}\,\theta_{max}}{2I}} \text{ şi } t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{I\theta_{max}}{M_{max}}}\,. \qquad (5.45)$$

Asupra arcului pot acţiona forţe sau momente exterioare lui, datorite de exemplu frecării sau anumitor cupluri rezistente sau motoare provenite din mecanismele auxiliare. Dacă se notează cu $M_0$ momentul acestui cuplu şi dacă el se consideră constant, se poate scrie:

$$\frac{1}{2}I\omega_x^2=\int_0^{\theta_x}(M_x+M_0)\,d\theta_x=\int_0^{\theta_x}\left(M_{max}\frac{\theta_{max}-\theta_x}{\theta_{max}}\pm M_0\right)d\theta, \qquad (5.46)$$

de unde

$$\frac{1}{2}\ I\omega_x^2=(M_{max}\pm M_0)\theta_x-M_{max}\frac{\theta_x^2}{2\theta_{max}} \tag{5.47}$$

şi

$$\omega_x=\sqrt{\frac{2M_{max}}{I}\ \theta_x\cdot\left[\left(1\pm\frac{M_0}{M_{max}}\right)-\frac{\theta_x}{2M_{max}}\right]}\ . \tag{5.48}$$

Pentru timp se obţine relaţia:

$$dt=\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2M_{max}}{I}\ \theta_x\left[\left(1\pm\frac{M_0}{M_{max}}\right)-\frac{\theta}{2\theta_{max}}\right]}}, \tag{5.49}$$

de unde, prin integrare:

$$t=\sqrt{\frac{I\theta_{max}}{M_{max}}}\ \text{arc cos}\left[1-\frac{M_{max}}{M_{max}\pm M_0}\cdot\frac{\theta_x}{\theta_{max}}\right]. \tag{5.50}$$

Pentru destinderea completă a arcului se obţine:

$$\omega=\sqrt{\frac{M_{max}\theta_{max}}{I}\left(1\pm\frac{2M_0}{M_{max}}\right)} \tag{5.51}$$

şi

$$t=\sqrt{\frac{I\theta_{max}}{M_{max}}}\ \text{arc cos}\ \frac{\pm M_0}{M_{max}\pm M_0}\ . \tag{5.52}$$

În aceste relaţii, cuplul forţelor exterioare poate fi pozitiv sau negativ. Se va lua pozitiv dacă are acelaşi sens cu $M_{max}$ dat de arc şi negativ dacă este un cuplu rezistent.

## 5.5. Materiale şi indicaţii tehnologice

Pentru fabricarea arcurilor spirale se folosesc mai ales benzi de oţel carbon sau de bronz cu beriliu. Banda din care se execută arcurile plate spirale pentru mecanismele de ceasornic, patefoane etc. se fabrică de obicei din oţel carbon. Procesul tehnologic al fabricaţiei arcurilor spirale cuprinde următoarele faze: debitarea materialului, fasonarea capetelor (prin rectificare), înfăşurarea, tratamentul termic, stabilizarea şi recepţia. Operaţia de înfăşurare se execută după o încălzire prealabilă la 800°—1 000°C, în cazul benzii de oţel. Înfăşurarea se face pe o maşină prevăzută cu un dispozitiv de prindere corespunzător.



Încercarea statică a arcului spiral se execută cu ajutorul unor maşini de răsucit speciale.

**Exemplu de calcul.** Să se dimensioneze un arc spiral plan pentru antrenarea unui aparat de telegraf Morse, cunoscînd următoarele date: $N=0{,}65$ kgfcm/s; $n=0{,}4$ rot/min; $R_0=13$ mm; timpul de desfăşurare a arcului $t=30$ min.

*Rezolvare.* Cunoscînd turaţia medie a arborelui antrenat de arc şi timpul de desfăşurare, se poate determina numărul $n$ de rotaţii pe care le generează arcul de la poziţia întors pînă la poziţia destins. Astfel $n=30\times0{,}4=12$ rotaţii ale tobei arcului.

Pe baza relaţiilor constructive date se poate determina raza interioară a tobei $R=3R_0=3\times13=39$ mm. Grosimea benzii arcului:

$$h\leqslant\frac{R_0}{15}=\frac{13}{15}=0{,}8825\ \text{mm}.$$

Se alege $h=0{,}5$ mm.

Se verifică numărul de rotaţii ale tobei la destinderea arcului spiral:

$$n_{max}=\frac{1}{h}\left[\sqrt{2(R^2+R_0^2)}-(R+R_0)\right]=\frac{1}{0{,}5}\left[\sqrt{2(39^2+13^2)}=(39+13)\right]=$$
$$=12{,}4\ \text{rot}.$$

Rezultă că numărul de rotaţii ales pentru desfăşurare a tobei se verifică.

**Lungimea arcului.** Se porneşte de la relaţiile:

$$n=n_2-n_1;\quad n_1=\frac{R-r}{h};\quad n_2=\frac{r_1-R_0}{h}$$

$$n=n_2-n_1=\frac{r_1-R_0-R+r}{h}=12=\frac{r_1-13-39+r}{0{,}5}\ .$$

Rezultă:

$$r_1+r=12\times0{,}5+13+39=58\ \text{mm}.$$

Se alege $r=26$ mm şi rezultă

$$r_1=58-26=32\ \text{mm};\quad n_1=\frac{39-26}{0{,}5}=26\ \text{spire},$$

$$n_2=\frac{32-13}{0{,}5}=38\ \text{spire şi deci}$$

$$n=n_2-n_1=38-26=12\ \text{rot}.$$

Lungimea arcului

$$l=(R+r)\,n_1+2r,$$

$$l=(39+26)\,26+2\times 26=1\,742 \text{ mm}.$$

Se execută $l=1\,750$ mm.

Lăţimea arcului rezultată din relaţia (5.34) se determină cu relaţia:

$$b=\frac{6Ml}{0{,}65\pi E h^3 n_2 x},$$

unde $x$ este un coeficient; $x=0{,}6$.

Ştiind că

$$\omega=\frac{\pi n}{30}=\frac{\pi 0{,}4}{30}=0{,}042 \text{ rad/s}$$

şi

$$M=\frac{N}{\omega}=\frac{0{,}65}{0{,}042}=15{,}5 \text{ kgf}\cdot\text{cm},$$

se află

$$b=\frac{6\times 15{,}5\times 1\,750}{0{,}65\pi\times 2{,}2\times 10^6\times 5^3\times 10^{-6}\times 38\times 0{,}6}\approx 13{,}4 \text{ mm}.$$

Momentul maxim dat de arc $M_{max}=\frac{\pi E b\, h^3}{6l}(n_1-0{,}35\, n_2+n)$. Înlocuind se obţine

$$M_{max}=\frac{\pi\times 2{,}2\times 10^6\times 1{,}34\times 5^3\times 10^{-6}}{6\times 175}(26-0{,}35\times 38+12)=28{,}2 \text{ kgf}\cdot\text{cm}.$$

$$M_{max}=282 \text{ kgf}\cdot\text{mm}.$$

Momentul minim $M_{min}=\frac{\pi E\, b\, h^3}{6l}(n_1-0{,}35\; n_2)$,

Înlocuind, se obţine:

$$M_{min}=\frac{\pi\times 2{,}2\times 10^6\times 1{,}34\times 5^3\times 10^{-6}}{6\times 550}(26-0{,}35\times 38)=14{,}5 \text{ kgf}\cdot\text{cm}.$$

$$M_{min}=145 \text{ kgf}\cdot\text{mm}.$$

$$\Delta M=M_{max}-M_{min}=282-145=137 \text{ kgf}\cdot\text{mm}.$$

# 6 Arcuri elicoidale

## 6.1. Generalităţi

Arcurile elicoidale sînt elemente elastice cu o largă răspîndire în construcţia de maşini, care asigură prin elasticitatea lor întinderea sau apăsarea corespunzătoare între două elemente ale mecanismului din care fac parte, acumulînd energie sau acţionînd ca un amortizor, prezentînd în acelaşi timp avantajul de a ocupa un spaţiu destul de mic în mecanism.

Arcurile elicoidale se execută din bare de diferite secţiuni (circulară, dreptunghiulară, pătrată, trapezoidală, inelară, eliptică etc.) prin înfăşurarea după o elice.

După modul în care acţionează sarcina se deosebesc:

Arcuri de întindere supuse unor sarcini axiale care întind arcul şi la care, în secţiunea transversală a barei din care sînt executate se dezvoltă, în primul rînd, eforturi unitare de răsucire;

Arcuri de compresiune, supuse unor sarcini axiale care comprimă arcul şi la care, de asemenea, în secţiunea transversală a barei se dezvoltă în primul rînd eforturi unitare de răsucire;

Arcuri de răsucire, solicitate de sarcini care se reduc la cupluri de forţe acţionînd în plane perpendiculare pe axa arcului, astfel că în sec-

ţiunea transversală a barei din care este executat arcul se dezvoltă, ca eforturi principale, eforturi unitare de încovoiere;

arcuri pentru sarcini combinate;

arcuri multiple, compuse din mai multe arcuri cilindrice dispuse concentric, utilizate în cazul sarcinilor mari.

După aspectul exterior (formal) al arcului şi după unele particularităţi constructive se deosebesc următoarele tipuri principale de arcuri:

arcuri elicoidale cilindrice, care se pot obţine prin înfăşurarea barei (sîrmei) pe un dorn cu secţiune transversală circulară; în acest caz, axa spirelor acestor arcuri este o elice cu pas constant; aceste arcuri pot fi executate dintr-o bară (sîrmă) cu secţiune transversală: circulară, pătrată, dreptunghiulară, trapezoidală etc. sau, pentru arcuri speciale, din cabluri împletite dintr-un număr mic de sîrme subţiri, cablul fiind înfăşurat după o elice; utilizarea arcurilor din cabluri de sîrmă împletită se justifică prin faptul că proprietăţile mecanice ale sîrmei subţiri sînt mult superioare proprietăţilor sîrmei de diametru mare, astfel că un arc executat din cablu are proprietăţi superioare;

arcuri prismatice, care se pot obţine prin înfăşurarea barei (sîrmei) pe un dorn prismatic de secţiune dreptunghiulară, pătrată etc.

arcuri profilate, care se obţin prin înfăşurarea sîrmei pe un dorn de profil special conic, paraboloidal, dublu conic, dublu paraboidal etc. Sîrma utilizată poate avea secţiunea transversală: circulară, pătrată sau dreptunghiulară. Aceste arcuri se execută în două moduri: cu pasul constant al spirelor şi cu pantă constantă a spirelor.

Din punctul de vedere al formei, în fig. 6.1, *a*—*l* sînt reprezentate principalele tipuri de arcuri.

În funcţie de solicitarea arcului la întindere, la compresiune, sau la răsucire capetele arcurilor sînt prevăzute cu diferite sisteme de legare, precum şi posibilităţi de reglare a prinderii capătului arcului. În fig. 6.2, *a*—*r* se dau diferite variante constructive şi dispozitive utilizate la formarea capetelor sau la prinderea lor pentru arcurile solicitate la întindere. În fig. 6.3, *a*—*e* se dau în mod similar variantele pentru cazul arcurilor solicitate la compresiune, iar în fig. 6.4, *a* şi *b* soluţii aplicate în cazul arcurilor de răsucire.

Pentru arcuri uşoare mici, denumite şi arcuri comerciale, la formarea capetelor se folosesc cele 35 de variante constructive indicate în fig. 6.5

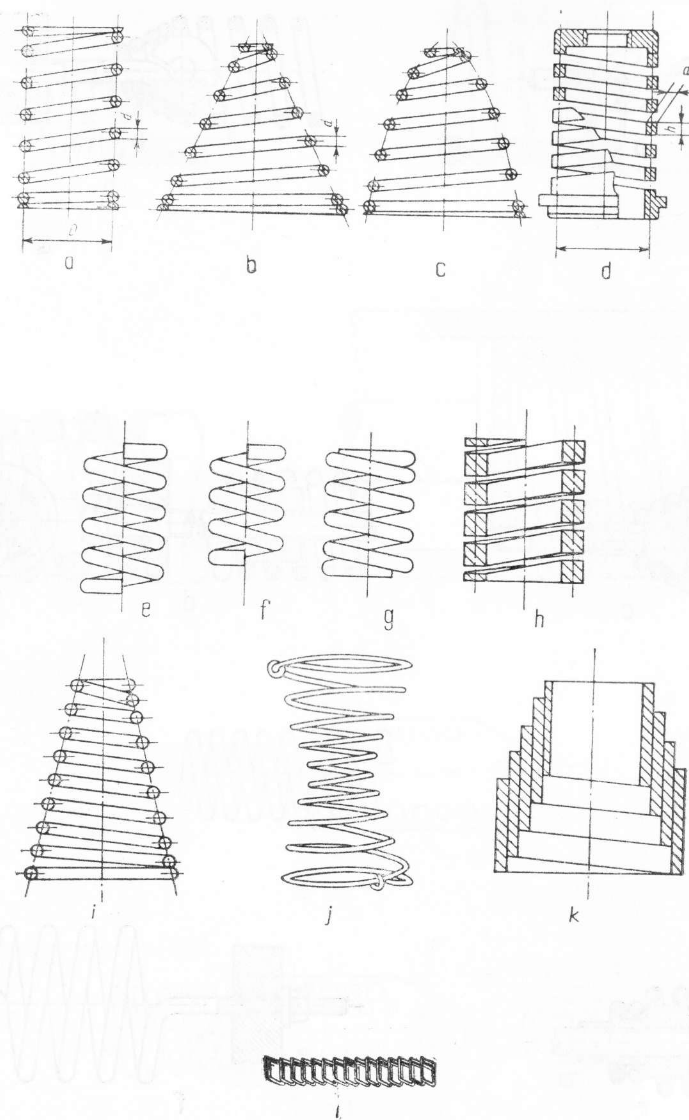


Fig. 6.1

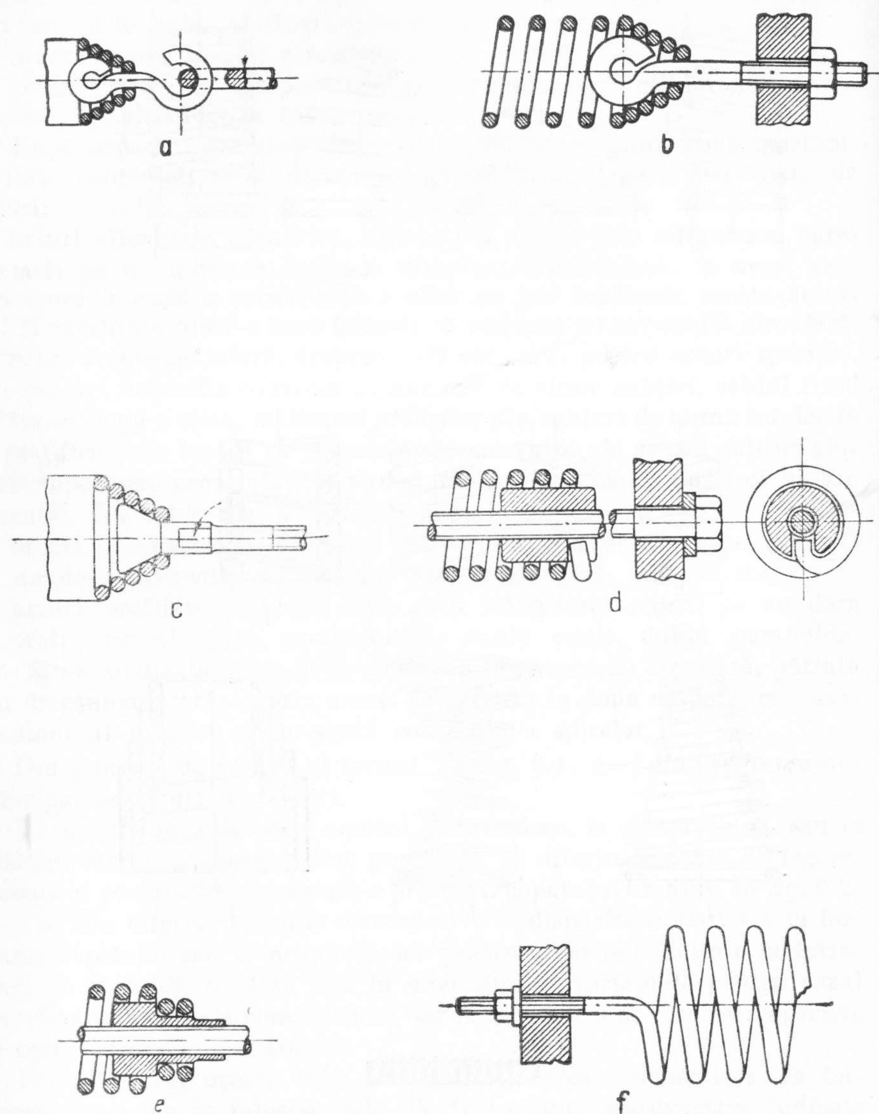


Fig. 6.2

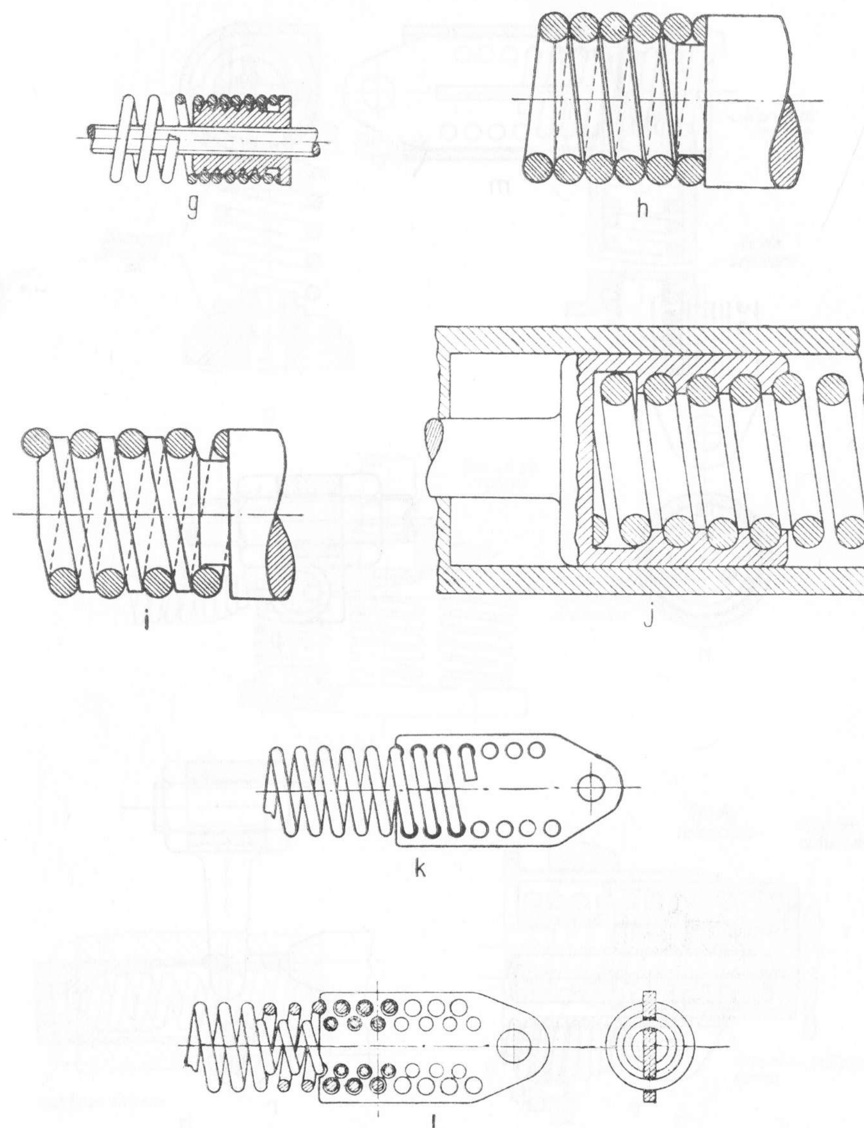


Fig. 6.2

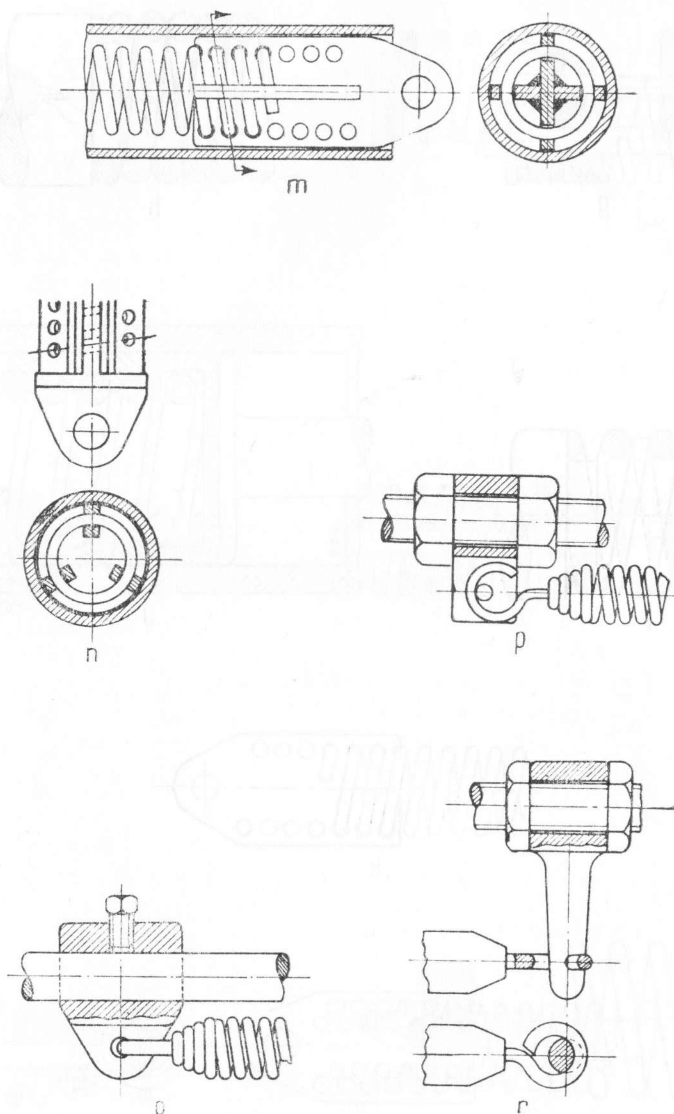

m
n
p
o
r

Fig. 6.2

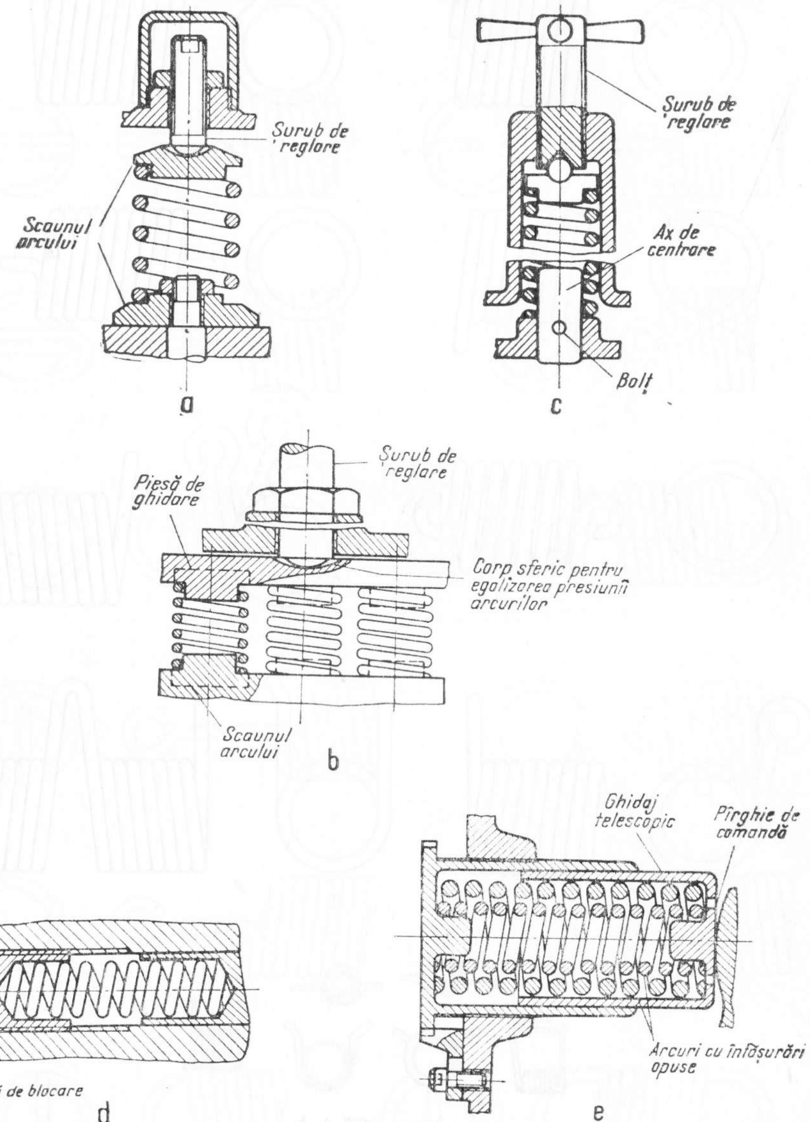

Șurub de reglare
Scaunul arcului
a
Șurub de reglare
Ax de centrare
Bolț
c
Șurub de reglare
Piesă de ghidare
Corp sferic pentru egalizarea presiunii arcurilor
Scaunul arcului
b
Ghidaj telescopic
Pîrghie de comandă
Arcuri cu înfășurări opuse
Piuliță de blocare
d
e

Fig. 6.3

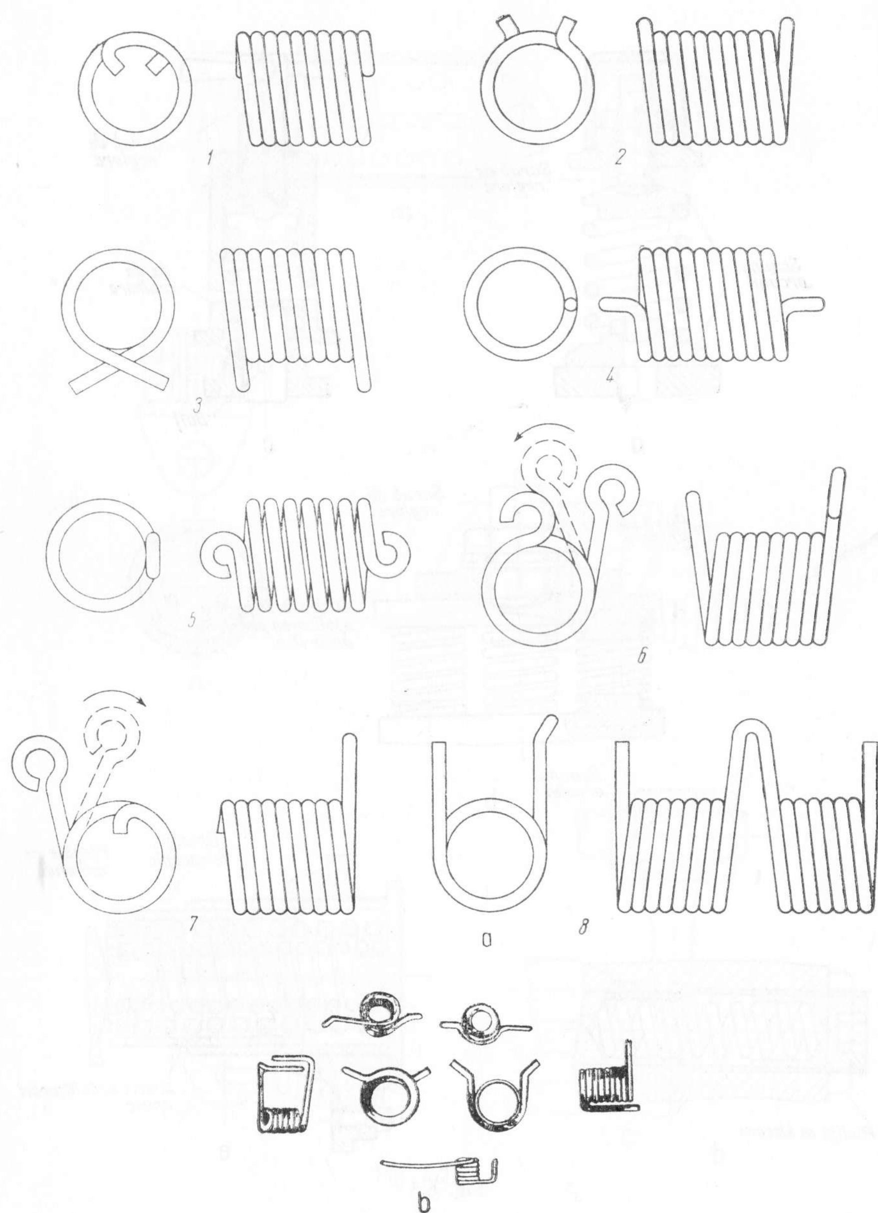


Fig. 6.4

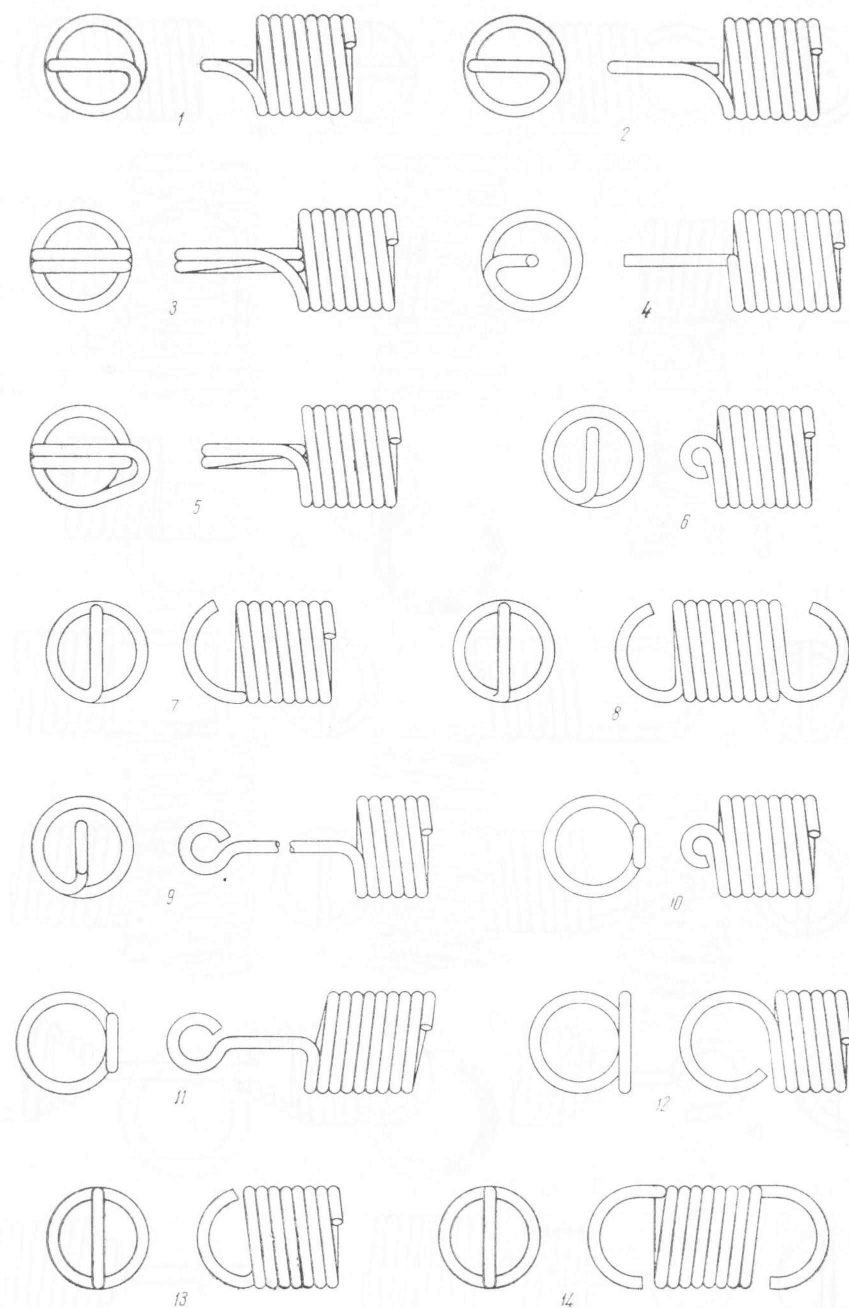


Fig. 6.5

Fig. 6.5

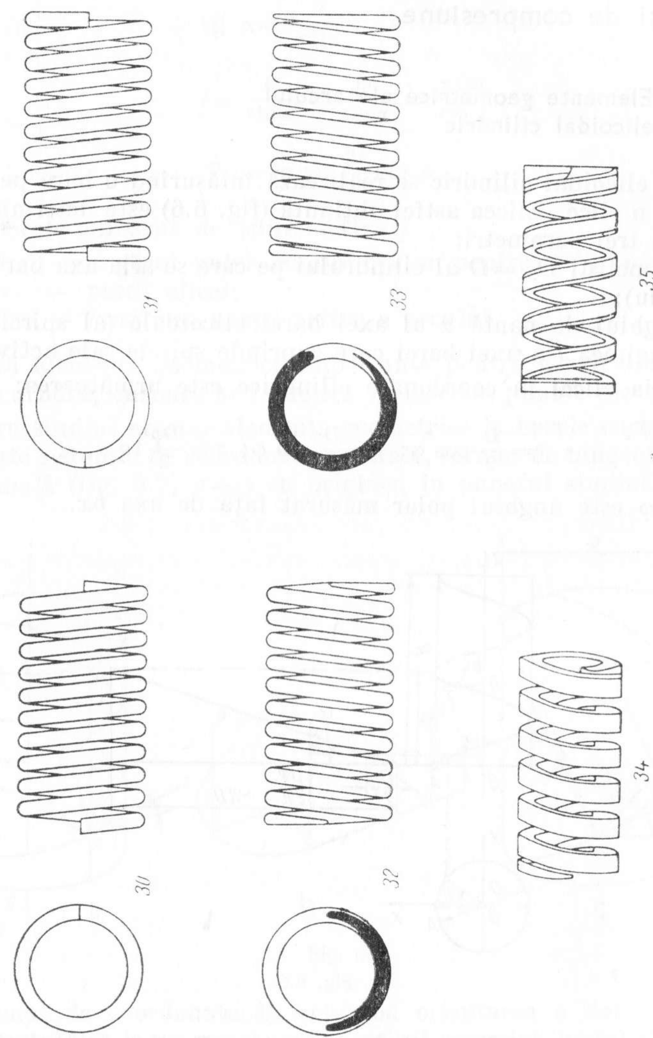



Fig. 6.5 *b*

## 6.2. Arcuri elicoidale cilindrice de întindere și de compresiune

### 6.2.1. Elemente geometrice ale arcului elicoidal cilindric

Arcul elicoidal cilindric se realizează înfășurînd o bară pe un cilindru după o elice. Elicea astfel obținută (fig. 6.6) este determinată dacă se cunosc trei parametri:

— diametrul $D_m = D$ al cilindrului pe care se află axa barei (diametrul mediu);

— unghiul de pantă $\alpha$ al axei barei elicoidale (al spirei arcului);

— lungimea $l$ a axei barei care cuprinde spirele sale active.

Ecuația elicei în coordonate cilindrice este următoarea:

$$x = \frac{D}{2}\cos\varphi;\quad y = \frac{D}{2}\sin\varphi;\quad z = \frac{D\varphi}{2}\operatorname{tg}\alpha, \tag{6.1}$$

în care: $\varphi$ este unghiul polar măsurat față de axa $ox$.

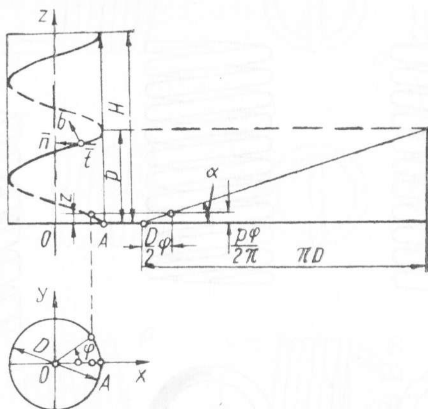


Fig. 6.6

Axa $ox$ este astfel aleasă încît să treacă prin capătul $A$, originea lungimii $l$. Sistemul de coordonate $x$, $y$, $z$ se ia ***dreapta*** în cazul elicei înfășurate pe dreapta și ***stînga***, în cazul elicei înfășurate pe stînga.



Analizînd fig. 6.6 rezultă, de asemenea, relațiile:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{\pi D n};$$

$$l = \frac{H}{\sin\alpha} = \frac{pn}{\sin\alpha} = \frac{\pi D n}{\cos\alpha}; \tag{6.2}$$

$$\varphi_n = 2\pi n = \frac{2l}{D}\cos\alpha,$$

în care: $n$ este numărul de spire active;

$\varphi_n$ — unghiul polar corespunzător pentru $n$ spire;

$p$ — pasul elicei;

$H$ — lungimea părții active a arcului.

Tot ca elemente geometrice importante pentru arcul elicoidal sînt: raza de curbură, curbura și răsucirea în diferite puncte ale elicei.

Pentru studiul acestor elemente geometrice la barele curbe în spațiu se folosește sistemul de coordonate naturale, format de tangentă, normală și binormală (fig. 6.7, $a$—$c$) cu originea în punctul studiat

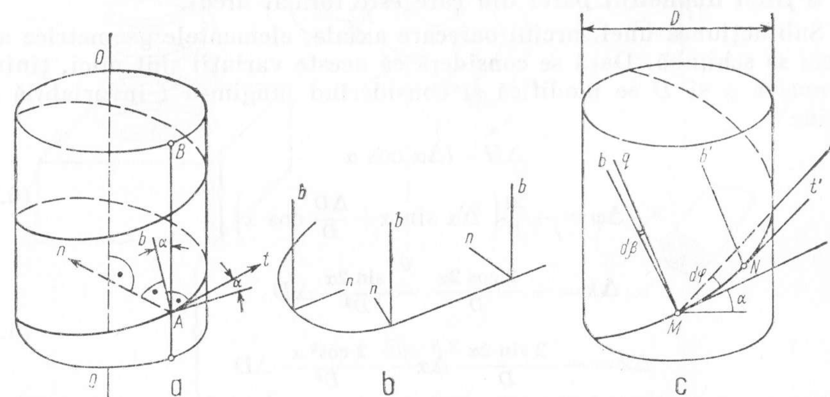


Fig. 6.7

Sistemul de coordonate își schimbă orientarea o dată cu trecerea de la punctul dat la un punct vecin, infinit apropiat, astfel că în această deplasare sistemul de coordonate se rotește rigid în jurul axei instantanee de rotație cu o viteză unghiulară $\vec{\omega}$, care se determină în raport

cu arcul $s$ parcurs pe curbă. Această viteză unghiulară are două componente:

— o mişcare de rotaţie în jurul tangentei cu viteza unghiulară $k$;
— o mişcare de rotaţie în jurul binormalei cu viteza unghiulară $\varkappa$;
astfel se poate scrie:

$$\bar{\omega}=k\bar{t}+\varkappa\bar{b},$$

unde $k$ este torsiunea elicei; $k=\frac{\sin 2\alpha}{D}$ (6.3, *a*)

— curbura elicei $\varkappa=\frac{2\cos^2\alpha}{D}$ (6.3, *b*)

Deoarece pentru o anumită poziţie a elicei mărimile $\alpha$ şi $D$ sînt constante, rezultă că şi răsucirea şi curbura sînt mărimi constante pentru toate punctele elicei.

În calculele practice se ţine seamă foarte mult de încă un indice geometric al arcului elicoidal cilindric şi anume de raportul de formă al arcului $j=\frac{D}{d}$, (6.4)

$d$ fiind diametrul barei din care este format arcul.

Sub acţiunea unei sarcini oarecare axiale, elementele geometrice ale elicei se schimbă. Dacă se consideră că aceste variaţii sînt mici, ţinînd seama că $\alpha$ şi $D$ se modifică şi considerînd lungimea $l$ invariabilă se obţine

$$\left.\begin{aligned}\Delta H&=l\Delta\alpha\cos\alpha\\ \Delta\varphi&=-\frac{2l}{D}\left(\Delta\alpha\sin\alpha+\frac{\Delta D}{D}\cos\alpha\right)\end{aligned}\right\}\qquad(6.5)$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta k&=+\frac{2\cos 2\alpha}{D}-\frac{\sin 2\alpha}{D^2}\Delta D\\ \Delta\varkappa&=-\frac{2\sin 2\alpha}{D}\Delta\alpha-\frac{2\cos^2\alpha}{D^2}\Delta D\end{aligned}\right\}\qquad(6.6)$$

Din ecuaţiile (6.6) rezultă:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha&=\frac{D}{2}(\Delta k-\Delta\varkappa\operatorname{tg}\alpha)\\ \frac{\Delta D}{D^2}&=-\frac{\Delta\varkappa}{2}(1-\operatorname{tg}^2\alpha)-\Delta k\operatorname{tg}\alpha\end{aligned}\qquad(6.7)$$



Folosind aceste relaţii, expresiile (6.5) devin:

$$\begin{aligned}\Delta H&=\frac{D^2n}{2}(\Delta k-\Delta\varkappa\operatorname{tg}\alpha)\\ \Delta\varphi&=\pi Dn(\Delta\varkappa+\Delta k\operatorname{tg}\alpha)\end{aligned}\qquad(6.8)$$

S-a obţinut săgeata, respectiv unghiul relativ de rotire al suprafeţelor frontale ale arcului.

Aceste relaţii legate de solicitările la care este supus arcul dau formulele de bază pentru calculul arcurilor în cazul deformaţiilor mici.

Considerînd un arc solicitat de o forţă axială $P$ (la întindere sau la compresiune) şi de un moment $\mathfrak{M}$, ca în fig. 6.8, se pot determina solicitările care apar într-o secţiune transversală oarecare a arcului.

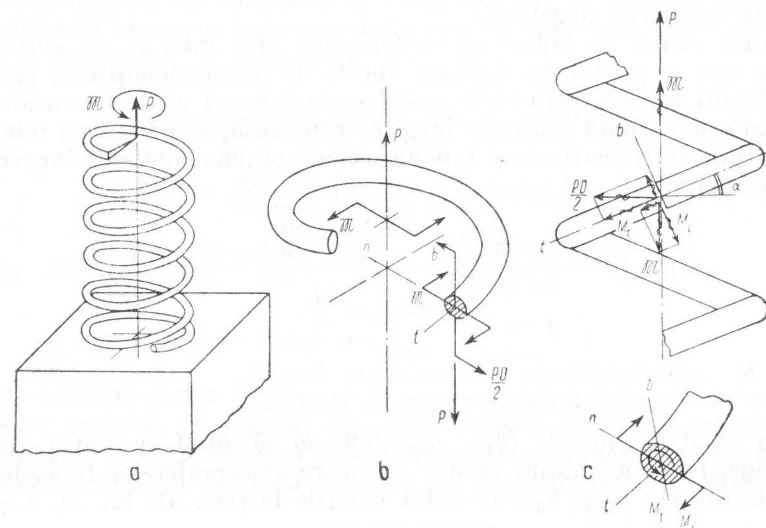



Fig. 6.8

Ţinînd seamă că înclinarea $\alpha$ a spirei este constantă, pentru o poziţie de echilibru a arcului se obţin expresiile momentelor de încovoiere şi de răsucire care acţionează într-o secţiune a arcului, precum şi eforturile normale şi tangenţiale care apar în secţiune.

Astfel, momentul încovoietor este

$$M_i=\mathfrak{M}\cos\alpha-\frac{PD}{2}\sin\alpha,\qquad(6.9,\ a)$$

iar momentul de răsucire este:

$$M_t = \mathfrak{M} \sin \alpha + \frac{PD}{2} \cos \alpha. \qquad (6.9,\ b)$$

Se observă că

$$N = P \sin \alpha, \qquad (6.9,\ c)$$

este o forţă axială normală pe secţiune, iar

$$T = P \cos \alpha \qquad (6.9,\ d)$$

o forţă care lucrează în secţiune.

Dacă momentul $\mathfrak{M}$ care acţionează tinde să răsucească arcul în sensul înfăşurării sale, el este considerat pozitiv, în caz contrar este considerat negativ.

Forţa $P$ care întinde arcul se consideră pozitivă, iar cea care comprimă arcul se consideră negativă.

Ţinînd seamă de faptul că deformaţiile sînt mici şi că eforturile unitare care se produc nu depăşesc limita de proporţionalitate, precum şi de faptul că bara elicoidală care formează arcul poate fi considerată ca o bară de curbură mică, de lungime constantă, se pot folosi relaţiile de legătură dintre curbura şi torsiunea barei şi momentele de încovoiere şi de răsucire:

$$\Delta \varkappa = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{M_i}{B}$$
$$\Delta k = k - k_0 = \frac{M_t}{C}, \qquad (6.10)$$

unde: $B$ este rigiditatea la încovoiere; $B = EI$;
$C$ — rigiditatea la răsucire; $C = GI_d$.

Din relaţiile (6.10), (6.9, *a*), (6.9, *b*) şi (6.8) se obţin expresiile săgeţii $f$ şi unghiului relativ de rotire al suprafeţelor frontale ale arcului. Cu $D_0$, $\alpha_0$ şi $n_0$ s-au notat valorile iniţiale ale lui $D$, $\alpha$ şi $n$:

$$f = \frac{\pi D_0 n_0}{4B \cos \alpha_0} \left[ PD_0 \left( \frac{B}{C} \cos^2 \alpha_0 + \sin^2 \alpha_0 \right) + \mathfrak{M} \left( \frac{B}{C} - 1 \right) \sin 2\alpha_0 \right];$$

$$\Delta \varphi = \frac{\pi D_0 n_0}{B \cos \alpha_0} \left[ \frac{PD_0}{4} \left( \frac{B}{C} - 1 \right) \sin 2\alpha_0 + \mathfrak{M} \left( \frac{B}{C} \sin^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0 \right) \right]. \qquad (6.11)$$

Variaţia diametrului:

$$\Delta D = -PD_0^3 \sin \alpha_0 \left( \frac{1}{2C} - \frac{1}{4B} \frac{\cos 2\alpha_0}{\cos^2 \alpha_0} \right) - \frac{\mathfrak{M} D_0^2}{2 \cos \alpha_0} \left( \frac{2 \sin^2 \alpha_0}{C} + \frac{\cos 2\alpha_0}{B} \right). \qquad (6.11,\ a)$$



Dacă se ţine seama şi de eforturile $N$ şi $T$ care apar în secţiune, expresia săgeţii (deplasarea axială asupra feţelor frontale) devine:

$$f = \frac{\pi D_0^2 n_0}{2B \cos \alpha_0} \left[ PD_0 \left( \frac{B}{C} \cos^2 \alpha_0 + \sin^2 \alpha_0 \right) + \mathfrak{M} \left( \frac{B}{C} - 1 \right) \sin 2\alpha_0 \right] +$$
$$+ \frac{\pi P D_0 n_0}{\cos \alpha_0} \left( \frac{\sin^2 \alpha_0}{EA} + \frac{\cos^2 \alpha_0}{GA} \right), \qquad (6.11,\ b)$$

unde $A$ este aria secţiunii transversale a spirei. În problemele practice, influenţa eforturilor normale şi tangenţiale la secţiune se consideră neglijabilă, fiind foarte mici, astfel că practic se lucrează numai cu prima variantă a relaţiei indicate.

În cazul arcurilor solicitate la întindere sau la compresiune, care sînt încărcate numai cu forţa care acţionează în sens axial. $P \neq 0$ şi $\mathfrak{M} = 0$, relaţiile precedente se simplifică şi devin:

$$f = \frac{\pi D_0^2 n_0}{4B \cos \alpha_0} PD_0 \left( \frac{B}{C} \cos^2 \alpha_0 + \sin^2 \alpha_0 \right) =$$
$$= \frac{\pi P D_0^3 n_0}{4C \cos \alpha_0} \left( \cos^2 \alpha_0 + \frac{C}{B} \sin^2 \alpha_0 \right) \qquad (6.12)$$

$$\Delta \varphi = \frac{\pi P D_0^2 n_0 \sin \alpha_0}{2} \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right) = \frac{\pi P D_0^2 n_0}{4 B \cos \alpha_0} \left( \frac{B}{C} - 1 \right) \sin 2\alpha_0$$

$$\Delta D = -PD_0^3 \sin \alpha_0 \left( \frac{1}{2C} - \frac{\cos^2 \alpha_0}{4B \cos^2 \alpha_0} \right).$$

Sub acţiunea forţei $P \neq 0$ dacă $\mathfrak{M} = 0$, suprafeţele frontale ale arcului se rotesc reciproc cu unghiul $\Delta \varphi$. Dacă această rotire este împiedicată de dispozitivul de prindere a capătului arcului, atunci acest dispozitiv acţionează asupra arcului elicoidal cu un moment dat de relaţia:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{PD_0 (C - B) \sin 2\alpha_0}{4(B \sin^2 \alpha_0 + c \cos^2 \alpha_0)}. \qquad (6.13)$$

Săgeata arcului se determină în acest caz introducînd în expresia (6.11) valoarea $\mathfrak{M}_1$.

$$f_1 = \frac{\pi P D_0^3 n_0}{4 \cos \alpha_0 (B \sin^2 \alpha_0 + C \cos^2 \alpha_0)}. \qquad (6.14)$$

În cazul arcurilor din sîrmă de secţiune circulară

$$B = \frac{\pi d^4}{64} E \text{ şi } C = \frac{\pi d^4}{32} G = \frac{\pi d^4 E}{64(1+\mu)}. \qquad (6.14,\ a)$$

În acest caz, pentru săgeata $f$, pentru unghiul de rotire relativă a suprafeţelor frontale, $\Delta\varphi$ şi pentru variaţia diametrului se obţin expresiile:

$$f=\frac{16\,PD_0^3n_0}{Ed^4}\cdot\frac{1+\mu\cos^2\alpha_0}{\cos\alpha_0};$$

$$\Delta\varphi=\frac{32\mu\,PD_0^2n_0\sin\alpha_0}{Ed^4};$$

$$\Delta D=\frac{16\,PD_0^3\sin\alpha_0}{\pi Ed^4}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha_0}+2\mu\right); \qquad (6.15)$$

$$\mathfrak{M}_1=\frac{-\mu\,PD_0\sin^2\alpha_0}{4\,(1+\mu\,\sin^2\alpha_0)};$$

$$f_1=\frac{16\,PD_0^3n_0(1+\mu)}{Ed^4\cos\,\alpha_0(1+\sin^2\alpha_0)}.$$

Deoarece în aplicaţiile practice în cazul arcurilor cilindrice pentru întindere şi compresiune, unghiul de înclinare al spirei este mic ($\alpha_0\leqslant$ $\leqslant 8...10°$), se poate considera $\sin\alpha_0\approx 0$ şi $\cos\alpha_0\approx 1$, astfel că relaţia săgeţii devine:

$$f_1=\frac{\pi PD_0^3n_0}{4\,C}=\frac{8\,PD_0^3n_0}{Gd^4}. \qquad (6.16)$$

Pentru calculul arcurilor de secţiune dreptunghiulară, expresia rigidităţii la răsucire $C$ trebuie determinată în funcţie de dimensiunile secţiunii transversale

$$C=GI_d,$$

unde $I_d=\beta a^3b$ pentru $a<b$;

şi $I_d=\beta ab^3$ pentru $a>b$.

Valorile coeficientului $\beta$ sînt date în tabela 6.1, în funcţie de raportul laturilor $\frac{a}{b}$ sau $\frac{b}{a}$

Pentru arcuri la care $\alpha_0\geqslant 10°$ se foloseşte relaţia:

$$f_2=m_1\frac{\pi PD_0^3n_0}{4C}=m_1f_1, \qquad (6.17)$$

*Tabela 6.1*

**Valorile coeficientului β**

| $\frac{a}{b}$ sau $\frac{b}{a}$ | 1 | 1,5 | 1,75 | 2 | 2,5 | 3 | 4 | 6 | 8 | 10 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| β | 0,141 | 0,198 | 0,214 | 0,229 | 0,249 | 0,263 | 0,281 | 0,299 | 0,307 | 0,303 | 0,333 |



în care

$$m_1=\cos\alpha+\frac{C}{B}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (6.18)$$

În tabela 6.2 se dau valorile raportului $\frac{C}{B}$ în funcţie de dimensiunile secţiunii.

*Tabela 6.2*

**Valorile raportului $\frac{C}{B}$**

| Forma secţiunii | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{a}{b}$ | — | ∞ | 3 | 2 | 1,5 | 1 | — | — | — | — |
| $\frac{b}{a}$ | — | — | — | — | — | 1 | 1,5 | 2 | 3 | ∞ |
| $\frac{C}{B}$ | 0,77 | 0 | 0,135 | 0,254 | 0,403 | 0,651 | 0,906 | 1,058 | 1,215 | 1,54 |

În cazul arcurilor solicitate la răsucire $\mathfrak{M}\neq 0$; $P=0$, relaţiile de calcul devin:

$$\Delta\varphi=\frac{\pi\mathfrak{M}D_0n_0}{\cos\alpha_0}\left(\frac{\sin^2\alpha_0}{C}+\frac{\cos^2\alpha_0}{B}\right);$$

$$f=\frac{\pi\mathfrak{M}D_0^2n_0}{2}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{B}\right)\sin\alpha_0; \qquad (6.19)$$

$$\Delta D=\frac{\mathfrak{M}D_0^2}{2\cos\alpha_0}\left(2\frac{\sin^2\alpha_0}{C}+\frac{\cos^2\alpha_0}{B}\right).$$

### 6.2.2. Arcuri elicoidale supuse la deformaţii mari

În cazul solicitării arcului cu forţe axiale $P$ şi cupluri mari, aceasta continuă să aibă o formă elicoidală, însă parametrii geometrici principali ai arcului deformat diferă de cei iniţiali.

Pentru dimensionare, este necesar să se țină seama de dimensiunile $D$ și $\alpha$, pe care le primește arcul încărcat.

Folosind aceleași notații și relații ca în cazul deformațiilor mici, se pot determina parametrii arcului cu deformații mari.

Deplasarea axială (săgeata) a capetelor arcului:

$$f=H-H_0=l\,(\sin\alpha-\sin\alpha_0). \tag{6.20}$$

Unghiul de rotire relativă al suprafeței frontale:

$$\Delta\varphi=\varphi_n-\varphi_{n0}=2l\left(\frac{\cos\alpha}{D}-\frac{\cos\alpha_0}{D_0}\right). \tag{6.21}$$

Variația curburii barei:

$$\Delta\varkappa=\varkappa-\varkappa_0=\frac{2\cos^2\alpha}{D}-\frac{2\cos^2\alpha_0}{D_0} \tag{6.21, a}$$

Variația torsiunii barei:

$$\Delta k=k-k_0=\frac{\sin 2\alpha}{D}-\frac{\sin 2\alpha_0}{D_0}. \tag{6.21, b}$$

Ținînd seamă de relațiile stabilite pentru momentul încovoietor și pentru momentul de răsucire (6.9, *a*) și (6.9, *b*) precum și de relația de legătură între parametrii geometrici $\Delta\varkappa$ și $\Delta k$ și aceste momente (6.10) se obține:

$$2B\left(\frac{\cos^2\alpha}{D}-\frac{\cos^2\alpha_0}{D_0}\right)=-\frac{PD}{2}\sin\alpha+\mathfrak{M}\cos\alpha;$$
$$C\left(\frac{\sin 2\alpha}{D}-\frac{\sin 2\alpha_0}{D_0}\right)=\frac{PD}{2}\cos\alpha+\mathfrak{M}\sin\alpha. \tag{6.22}$$

În cazul arcurilor solicitate la întindere sau la compresiune $\mathfrak{M}=0$, astfel că din relațiile (6.22) și (6.20) se obțin relațiile:

$$P=\frac{4B}{D_0^2}\sin(\alpha-\alpha_0)\frac{\cos^2\alpha_0}{\cos\alpha}\cdot\frac{\frac{B}{C}\cos\alpha\cos\alpha_0+\sin\alpha\sin\alpha_0}{\left(\frac{B}{C}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)^2}$$
$$f=l\,(\sin\alpha-\sin\alpha_0), \tag{6.23}$$

unde

$$l=\frac{H_0}{\sin\alpha_0}=\frac{\pi D_0 n_0}{\cos\alpha_0}. \tag{6.24}$$



Dacă suprafețele frontale sînt împiedicate de a se roti, capetele arcului fiind astfel fixate, încît nu se pot deplasa decît în sens longitudinal, adică $\Delta\varphi=0$, rezultă:

$$\frac{\cos\alpha}{D}=\frac{\cos\alpha_0}{D_0}\quad\text{sau}\quad D=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_0}D_0,$$

iar ecuațiile (6.23) devin:

$$P=\frac{4\cos^2\alpha_0}{D_0^2}\left[C(\sin\alpha-\sin\alpha_0)-B\sin\alpha\left(1-\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha}\right)\right];$$
$$f=l\,(\sin\alpha-\sin\alpha_0). \tag{6.25}$$

Aceste ecuații reprezintă caracteristica arcurilor de compresiune și tracțiune, în cazul fixării capetelor împotriva rotirii ($\Delta\varphi=0$). În fig. 6.9 este reprezentată caracteristica arcului atît la întindere (curba *b*), cît și la compresiune (curba *a*). Caracteristica liniară trasată întrerupt la mijloc corespunde deplasărilor mici pentru $\alpha\approx\alpha_0$ și se numește caracteristică liniară aproximativă.

În proiectare se utilizează caracteristici specifice, care ajută la calcularea elementelor geometrice ale arcurilor, în speță la calcularea caracteristicii propriu-zise.

Notînd cu $\delta$ și $q$ caracteristicile specifice, ale căror valori sînt date de relațiile:

$$\delta=\frac{f}{\pi D_0 n_0}; \tag{6.26}$$

$$q=\frac{PD_0^2}{4C} \tag{6.27}$$

și înlocuind aceste notații în ecuațiile caracteristicilor exprimate în relațiile (6.23) și (6.25), pentru arcurile de întindere și compresiune cu capătul liber (cu posibilitate de rotire relativă a suprafețelor frontale ale arcului $\Delta\varphi\neq0$ sau cu capătul fixat, deci $\Delta\varphi=0$), se pot obține caracteristicile specifice:

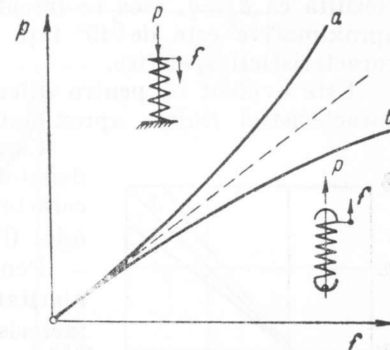


Fig. 6.9

$$q_{\Delta\varphi\neq0}=\sin(\alpha-\alpha_0)\frac{\cos^2\alpha_0}{\cos\alpha}\,\frac{\cos\alpha\cos\alpha_0+\frac{C}{B}\sin\alpha\sin\alpha_0}{\left(\cos^2\alpha+\frac{C}{B}\sin^2\alpha\right)^2};$$

$$q_{\Delta\varphi=0}=\cos^2\alpha_0\left[(\sin\alpha-\sin\alpha_0)-\frac{B}{C}\sin\alpha\left(1-\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha}\right)\right]; \tag{6.28}$$

$$\delta=\frac{\sin\alpha-\sin\alpha_0}{\cos\alpha_0}.$$

Dacă se cunosc parametrii $\delta$ şi $q$, se pot uşor determina săgeata şi forţa. Astfel:

$$f=\pi D_0 n_0 \delta; \; P=\frac{4C}{D_0^2} q. \tag{6.29}$$

O astfel de caracteristică specifică se construieşte pornind de la cunoaşterea pantei de înclinare iniţială $\alpha_0$ şi a formei secţiunii transversale a sîrmei, ceea ce permite cunoaşterea raportului rigidităţii $\frac{C}{B}$ Efectuînd calculele pentru diferite valori ale lui $\alpha$ variabil se obţin valorile parametrilor caracteristicii specifice, din care se pot apoi uşor obţine caracteristicile reale ale arcului studiat. În fig. 6.10 este reprezentată o astfel de caracteristică specifică pentru $\alpha_0=15°$, curba *1* corespunzînd la întindere, curba *2* la compresiune, iar curba *3* fiind curba caracteristicii liniare aproximative, pentru unghiul $\alpha_0 \approx 15°$. Ţinînd seamă de relaţia (6.16), aplicabilă în domeniul deformaţiilor mici, se obţine:

$$f_1=\frac{\pi P D_0^3 n_0}{4C} \text{ sau } \frac{f_1}{\pi D_0 n_0}=\frac{P D_0^2}{4C}. \tag{6.30}$$

Rezultă că $\delta_0=q$, ceea ce înseamnă că înclinarea caracteristicii liniare aproximative este de 45° faţă de axele de coordonate ale diagramei caracteristicii specifice.

Este evident că pentru diferite valori ale unghiului $\alpha_0$ vor rezulta caracteristici liniare aproximative diferite.

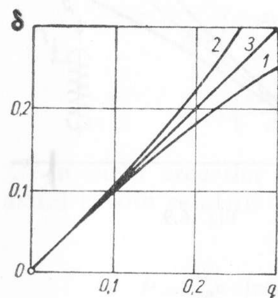


Fig. 6.10

Caracteristicile specifice exprimate în coordonatele $\delta - q$ sînt neliniare şi abaterile de la caracteristica liniară aproximativă sînt foarte mici (fig. 6.11, *a*).

Pentru a pune mai bine în evidenţă neliniaritatea caracteristicilor se construiesc caracteristicile arcului în coordonate $(\delta-\delta_0)$ şi $(q=\delta_0)$, aşa cum se arată în fig. 6.11, *b*. Ţinînd seamă că $q=\delta_0$ rezultă că determinarea parametrului $\delta_{max}$ se obţine prin însumarea abscisei cu ordonata, adică, folosind notaţiile din fig. 6.11: $(\delta-\delta_0)+q=\delta$, sau pentru valoarea maximă $\delta_{max}=OB+BA$.

În calculul de proiectare se determină deplasarea capătului arcului între două poziţii limită (iniţial *A* şi final *B*) de lucru ale arcului. În acest caz, folosind notaţiile din fig. 6.11, *c*, se obţine:

$$\delta_{max}=(OB'+BB')-(OA'+A'A). \tag{6.31}$$



Caracteristicile specifice de neliniaritate depind de valoarea unghiului iniţial $\alpha_0$. În fig. 6.12, *a* şi *c* sînt reprezentate caracteristicile specifice ale arcurilor de secţiune circulară cu capătul liber, iar în fig. 6.12, *b* şi *d*, cu capătul fix pentru diferite valori ale unghiului iniţial $\alpha_0$. Arcurile din fig. 6.12 *a* şi *b* sînt pentru compresiune, iar cele din fig. 6.12, *c* şi *d* pentru întindere.

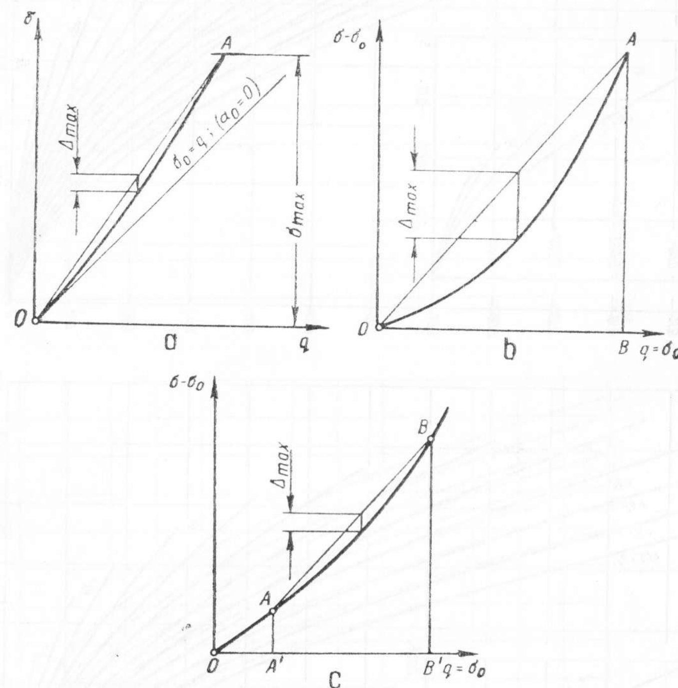


Fig. 6.11

În proiectare se utilizează la construcţia caracteristicii arcului şi noţiunea de abatere relativă (procentuală), dată de relaţia:

$$\eta=\frac{\Delta_{max}}{\delta_{max}} \tag{6.32}$$

unde $\Delta_{max}$ reprezintă maximul diferenţei dintre caracteristica liniară şi cea neliniară.

Abaterea relativă dă o lungime mai clară a neliniarității caracteristicii arcului. Aceste abateri relative depind, de asemenea, de mărimea unghiului inițial. În fig. 6.13, *a* și *b* se dau diagramele abaterilor procentuale de neliniaritate în coordonatele $\delta$, $\eta$ în funcție de unghiul inițial $\alpha_0$ pentru arcurile de compresiune; în fig. 6.13 *c* și *d* pentru

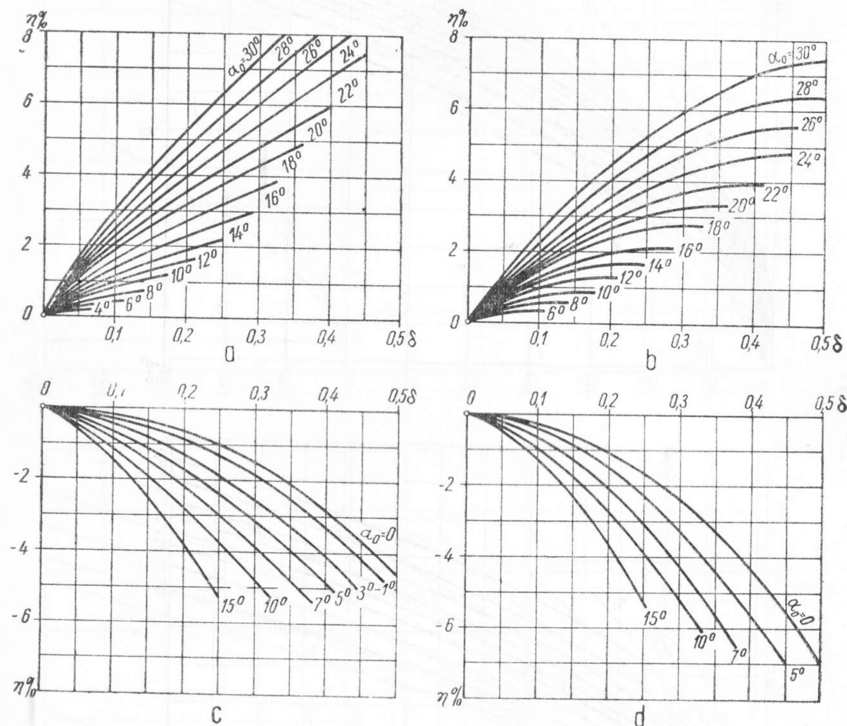



Fig. 6.13

arcurile de întindere. Diagramele din fig. 6.13 *a* și *c* corespund arcurilor cu capătul liber, iar cele din fig. 6.13, *b* și *d* celor cu capătul fixat.

Aceste diagrame și caracteristici specifice permit construirea rapidă a caracteristicilor reale și ușurează calculul de proiectare.

În cazul secțiunii dreptunghiulare, pentru determinarea caracteristicilor specifice și a caracteristicilor de neliniaritate, trebuie avut în vedere că în valorile parametrului $q$ intervin și expresiile rigidității la încovoiere $B$ și la răsucire $C$.



În fig. 6.14 sînt reprezentate astfel de caracteristici pentru secțiuni dreptunghiulare la care raportul laturilor este trei, comparate cu o secțiune circulară. Diagramele din fig. 6.14, *a* și *c* se referă la arcurile de compresiune, iar cele din fig. 6.14, *b* și *d* la cele de întindere.

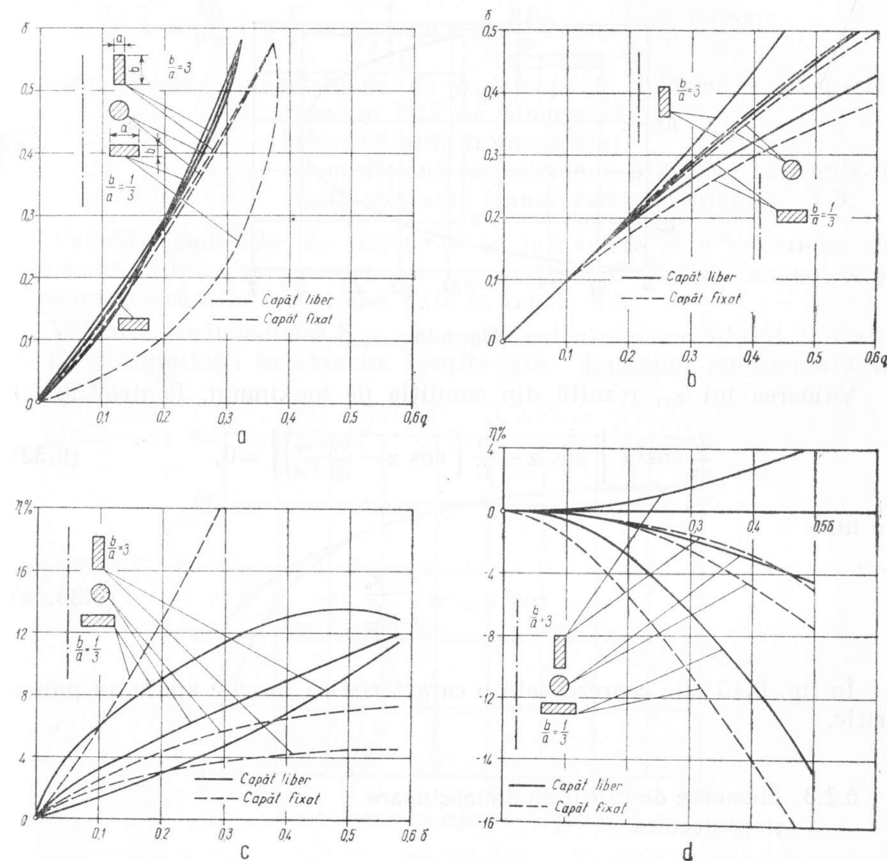



Fig. 6.14

Dacă raportul laturilor este mare și capătul arcului este fixat, astfel încît suprafețele frontale să nu se poată roti una față de alta, caracteristica arcului are un punct de întoarcere (de răsturnare) denumit punct

critic, care face ca funcţionarea arcului să fie anormală, în sensul că, deşi săgeata creşte, forţa scade. O dată cu creşterea săgeţii variază şi unghiul de înclinare al pantei spirei arcului. Unghiul corespunzător punctului critic se numeşte unghi critic. Acest fenomen apare mai ales la arcurile de compresiune.

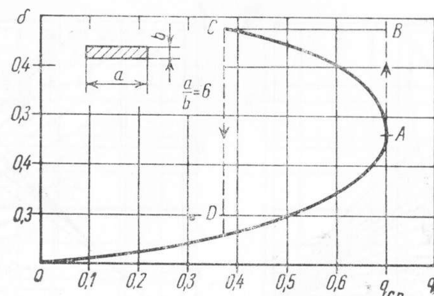


Fig. 6.15

Valoarea lui $\alpha_{cr}$ rezultă din condiţia de maximum. Pentru $\Delta\varphi=0$

$$\frac{dq}{d\alpha}\cos^2\alpha\left[\cos\alpha-\frac{B}{C}\left(\cos\alpha-\frac{\cos\alpha_0}{\cos^2\alpha}\right)\right]=0, \tag{6.33}$$

de unde

$$\cos^3\alpha_{cr}=\frac{\cos\alpha_0}{1-\frac{C}{B}} \tag{6.33, a}$$

În fig. 6.15 este reprezentată o caracteristică în care apare un punct critic.

### 6.2.3. Elemente de calcul de dimensionare şi proiectare

Considerînd cazul general al unui arc elicoidal cilindric, solicitat de o forţă axială $P$ şi de un cuplu $\mathfrak{M}$ aplicat în planul suprafeţelor frontale şi ţinînd seama de relaţiile (6.9, *a*), (6.9, *b*) şi (6.9, *c*), rezultă că spirele arcului sînt solicitate simultan la răsucire, la încovoiere, la întindere şi la forfecare. Într-o secţiune transversală oarecare dintr-o



spiră a arcului apar eforturi unitare normale şi eforturi unitare tangenţiale, ale căror expresii sînt:

$$\sigma=-\frac{M_i}{W_i}+\frac{N}{A}=\frac{-1}{W}\left[\mathfrak{M}\cos\alpha-\frac{PD}{2}\sin\alpha\right]+\frac{P\sin\alpha}{A} \tag{6.34}$$

$$\tau=\frac{M_t}{W_d}+\beta\frac{T}{A}=\frac{1}{W_d}\left[\sin\alpha+\frac{PD_n}{2}\cos\alpha\right]+\beta\frac{D\cos\alpha}{A},$$

în care: $W$, $W_d$ sînt modulele de rezistenţă la încovoiere, respectiv răsucire faţă de binormală;

$A$ — aria secţiunii transversale;

$\beta$ — un coeficient care depinde de forma secţiunii în cazul secţiunii transversale circulare $\beta=1{,}3$.

Valorile modulelor de rezistenţă la încovoiere şi a modulelor de rezistenţă la răsucire, precum şi a rigidităţilor $B$ şi $C$ la încovoiere şi răsucire necesare în calcul sînt date în tabela 6.3.

Valoarea coeficienţilor $\xi$ şi $\eta$ necesari calculului modulului de rezistenţă şi rigidităţii la răsucire rezultă din diagrama reprezentată în fig. 6.16.

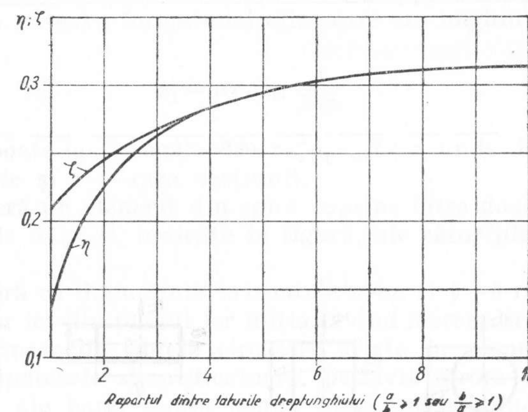



Fig. 6.16

Raza de curbură $\rho$ a spirei arcului cilindric elicoidal are o influenţă deosebită asupra legii de repartiţie a eforturilor unitare tangenţiale în secţiunile transversale, astfel că în fibra interioară, efortul unitar tangenţial este mai mare decît în fibra exterioară a spirei.

*Tabela 6.3*

**Valorile caracteristicilor auxiliare necesare pentru calculul de rezistență și rigiditate al arcurilor elicoidale**

| Forma secțiunii transversale a spirei și poziția ei față de axa arcului | $B$ | $C$ | $W$ | $W_d$ |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $d$ | $\frac{\pi d^4}{64} E$ | $\frac{\pi d^4}{32} G$ | $\frac{\pi d^3}{32}$ | $\frac{\pi d^3}{16}$ |
| $a$ | $\frac{a^4}{12} E$ | $0{,}141\, a^4 G$ | $\frac{a^3}{6}$ | $0{,}208\, a^3$ |
| $b>a$ | $\frac{ba^3}{12} E$ | $\eta b a^3 G$ | $\frac{ba^2}{6}$ | $\zeta\, ba^2$ |
| $a>b$ | $\frac{ba^3}{12} E$ | $\eta a b^3 G$ | $\frac{ba^2}{6}$ | $\zeta a b^2$ |

Axa arcului

*Observație.* Valorile coeficienților $\eta$ și $\zeta$ sînt date pe diagrama din fig. 6.16 în funcție de raportul dintre lungimea laturii mari a dreptunghiului și lungimea laturii mici



Dacă se consideră o spiră deschisă de forma unei bare toroidale încărcată prin două forțe aplicate în direcția axei longitudinale, a arcului, chiar pe axă, acționînd asupra spirei prin două pîrghii considerate absolut rigide $I$ și $II$ (fig. 6.17, *a*), și permanent orizontale, legate de capetele spirei, aceasta se deformează și ia forma unei bare elicoidale.

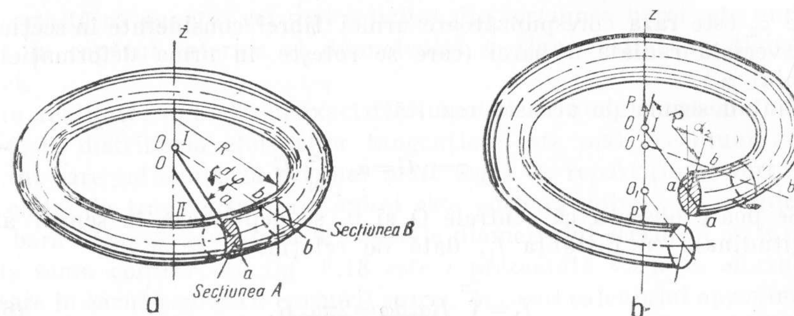



Fig. 6.17

Dacă se consideră o fibră circulară de rază $\rho_1$ din această bară, după deformare, ea va avea forma unei elice care are unghiul de înclinare al spirei:

$$\alpha_1 = \text{arc. tg}\, \frac{h}{2\pi\rho_1}\,. \qquad (6.35)$$

Raza $\rho_1$ poate lua valorile $R - r \leqslant \rho_1 \leqslant R + r$, unde $R$ este raza axei barei toroidale și $r$ – raza secțiunii.

Se consideră un element din spiră cuprins între două secțiuni transversale radiale $A$ și $B$, indicate în figură, ale căror plane fac între ele unghiul $d\varphi$.

Se consideră că diametrele orizontale $a - a$ și $b - b$ rămîn tot timpul orizontale, dar ies din planul lor inițial avînd mereu direcția normalelor la elicele formate de fibrele circulare aflate în planul median.

Folosind ipotezele simplificatoare, potrivit cărora secțiunile transversale plane ale barei rămîn mereu plane, păstrîndu-se dimensiunile inițiale (unghiul $\alpha_1$ este mic) și potrivit cărora o secțiune a barei se rotește în jurul diametrului orizontal cu un unghi $\alpha_2$ mic (fig. 6.17, *b*), astfel ca să fie mereu normală pe elicea formată de fibra centrală a secțiunii, se poate deduce că, datorită deformațiilor, fibrele nu mai sînt perpendiculare pe secțiunile transversale și că în aceste secțiuni apar eforturi tangențiale în toate punctele, cu excepția punctului central.

Dacă se consideră elementul de spiră cuprins între secţiunile $A$ şi $B$, lungimea unei fibre aflate la distanţa $\rho_1$ de axa longitudinală este $\rho_1 d\varphi$. Unghiul de alunecare este dat de relaţia:

$$\gamma=\frac{\rho_2\alpha_2 d\varphi}{\rho_1 d\varphi}=\frac{\rho_2\alpha_2}{\rho_1}, \tag{6.36}$$

unde $\rho_2$ este raza corespunzătoare urmei fibrei considerate în secţiunea transversală radială a barei (care se roteşte în urma deformaţiei cu unghiul $\alpha_2$).

Ţinînd seama de aceasta rezultă:

$$\tau=\gamma G=\alpha_2\frac{\rho_2}{\rho_1}G. \tag{6.37}$$

Se poate observa că centrele O şi $0_1$ se deplasează în sensul axei longitudinale cu distanţa $f_1$, dată de relaţia:

$$f_1=\int_0^{2\pi} R\alpha_2 d\varphi=2\pi\alpha_2 R. \tag{6.38}$$

Se poate observa, de asemenea, că toate fibrele au într-o secţiune aceeaşi deplasare.

Lucrul mecanic efectuat de forţele exterioare este acumulat ca energie de deformare prin răsucire. Deci:

$$\frac{Pf_1}{2}=\frac{M_t^2 2\pi R}{2GI_p}=\frac{P^2R^3 2\pi}{2GI_p},$$

de unde

$$f_1=\frac{2\pi R^3 P}{GI_p}. \tag{6.39}$$

Din relaţiile (6.37), (6.38) şi (6.39) rezultă:

$$\tau=\frac{PR^2\rho_2}{I_p\rho_1}=\frac{M_t\rho_2}{I_p}\cdot\frac{R}{\rho_1}, \tag{6.40}$$

de unde

$$\tau_{max}=\frac{M_t r}{I_p}\cdot\frac{R}{R-r}=\frac{M_t}{W_p}\cdot\frac{j}{j-1} \tag{6.40, a}$$

apare în fibra interioară;

$$\tau_{min}=\frac{M_t r}{I_p}\cdot\frac{R}{R+r}=\frac{M_t}{W_p}\frac{j}{j+1} \tag{6.40, b}$$

apare în fibra exterioară.

Cu $j$ s-a notat raportul de formă al arcului dat de relaţia $j=\frac{R}{r}=\frac{D}{d}$.



Valoarea uzuală a acestui raport este: $4\leqslant j\leqslant 20$.

Se observă că:

$$\frac{\tau_{max}}{\tau_{min}}=\frac{j+1}{j-1}. \tag{6.41}$$

Rezultă că punctul cel mai solicitat din secţiunea barei este punctul aflat la capătul interior al diametrului secţiunii, aflat pe diametrul spirei.

În realitate, datorită inexactităţii ipotezelor simplificatoare expuse anterior, distribuţia eforturilor tangenţiale este mai accentuată. Elementul care influenţează cel mai mult legea de repartiţie a eforturilor în secţiunile transversale ale spirei este curbura spirei. Dacă spira ar fi o bară dreaptă, eforturile la capetele diametrului secţiunii ar fi egale şi de semn contrar. În fig. 6.18 este reprezentată variaţia eforturilor unitare în cazul neglijării curburii spirei, în cazul calculului aproximativ

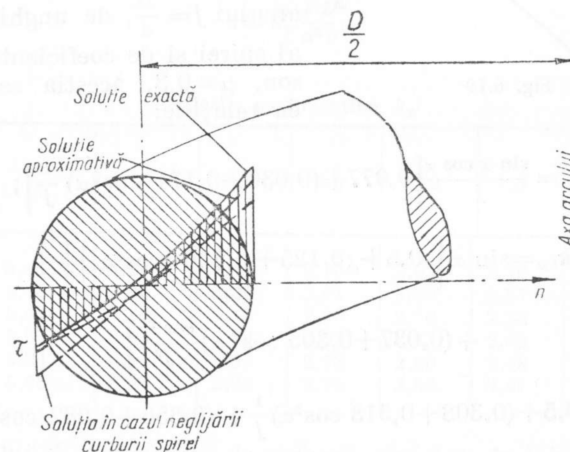



Fig. 6.18

şi în cazul unui calcul exact. Eroarea care rezultă între calculul aproximativ şi cel exact este de aproximativ 3%.

Pentru arcurile de întindere şi compresiune ($P\neq 0$ şi $\mathfrak{M}=0$), N. A. Cernîşev, pe baza unui studiu aprofundat, a stabilit valorile eforturilor unitare în punctul cel mai solicitat din capătul interior al diametrului

secţiunii transversale a spirei (fig. 6.19), care are direcţia normalei. Eforturile unitare au fost stabilite după componentele lor pe direcţiile tangentei normalei şi binormalei.

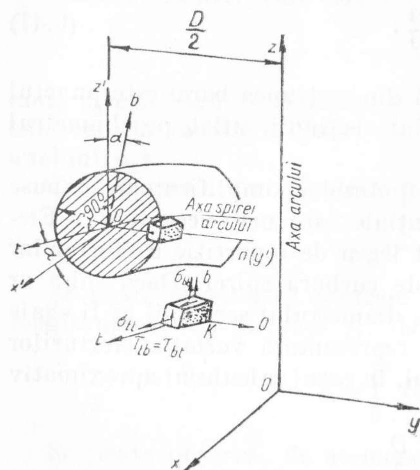



Fig. 6.19

$$\sigma_{bb}=k_{bp}\frac{PD}{W};\quad \sigma_{tt}=k_{tp}\frac{PD}{W}$$

şi

$$\tau_{tb}=\tau_{bt}=k_p\frac{PD}{W_p}. \tag{6.42}$$

Valorile coeficienţilor $k_{bp}$, $k_{tp}$ şi $k_p$, în care litera $p$ indică solicitarea numai la forţa axială, iar indicii $b$ şi $t$ — direcţia axelor, au fost calculate de N. A. Cernîşev. Ţinînd seamă de raportul de formă al arcului $j=\frac{D}{d}$, de unghiul de pantă al spirei şi de coeficientul lui Poisson, $\mu=0{,}3$, aceştia se determină cu relaţiile:

$$k_{bp}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{j}\left[0{,}077+(0{,}036+0{,}171\cos^2\alpha)\frac{1}{j}\right];$$

$$k_{tp}=\sin\alpha\left[0{,}5+(0{,}125+0{,}436\cos^2\alpha)\frac{1}{j}+\right.$$

$$\left.+(0{,}037+0{,}305\cos^2\alpha)\frac{\cos^2\alpha}{j^2}\right]; \tag{6.43}$$

$$k_p=\cos\alpha\left[0{,}5+(0{,}308+0{,}318\cos^2\alpha)\frac{1}{j}+(0{,}356+0{,}082\cos^2\alpha)\frac{\cos^2\alpha}{j^2}\right].$$

Valorile acestor coeficienţi, calculate pentru diferite valori ale lui $\alpha$ şi $j$, sînt date în tabela 6.4.

În cazul secţiunilor transversale dreptunghiulare (v. fig. din tabela 6.6), pentru eforturile în punctul $K$, în mijlocul laturii interioare, se foloseşte relaţia:

$$\tau=k_p'\frac{PD}{a^2b}. \tag{6.44, a}$$



*Tabela 6.4*

**Valorile coeficienţilor $k_{bp}$, $k_{tp}$, $k_p$**

| $j=\frac{D}{d}$ | $K_{bp}$ | | | $k_{tp}$ | | | $k_p$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0° | 15° | 30° | 0° | 15° | 30° | 0° | 15° | 30° |
| 3 | 0,000 | 0,012 | 0,017 | 0,000 | 0,183 | 0,328 | 0,757 | 0,719 | 0,20 |
| 4 | 0,000 | 0,008 | 0,011 | 0,000 | 0,168 | 0,312 | 0,683 | 0,652 | 0,567 |
| 6 | 0,000 | 0,005 | 0,007 | 0,000 | 0,154 | 0,290 | 0,616 | 0,590 | 0,518 |
| 8 | 0,000 | 0,003 | 0,005 | 0,000 | 0,147 | 0,279 | 0,584 | 0,560 | 0,496 |
| 10 | 0,000 | 0,002 | 0,004 | 0,000 | 0,144 | 0,273 | 0,567 | 0,544 | 0,483 |

Valorile lui $k_p'$, pentru $\mu=0{,}3$, sînt date în tabela 6.5, în funcţie de rapoartele $D/a$ şi $b/a$.

Un alt punct periculos este punctul $N$, mijlocul laturii perpendiculare pe axa arcului. În acest caz

$$\tau=k_p''\frac{PD}{a^2b}. \tag{6.44 b}$$

*Tabela 6.5*

**Valorile coeficienţilor $k_p'$**

| $\frac{D}{a}$ \ $\frac{b}{a}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 0,8 | 1,0 | 1,25 | 1,5 | 2,0 | 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 6,16 | 4,53 | 3,47 | 3,16 | 2,93 | 2,78 | 2,58 | 2,35 |
| 5 | 5,80 | 4,28 | 3,29 | 3,01 | 2,80 | 2,67 | 2,48 | 2,25 |
| 6 | 5,55 | 4,10 | 3,18 | 2,90 | 2,70 | 2,58 | 2,40 | 2,19 |
| 7 | 5,37 | 3,98 | 3,09 | 2,84 | 2,65 | 2,52 | 2,35 | 2,15 |
| 8 | 5,24 | 3,83 | 3,03 | 2,78 | 2,60 | 2,48 | 2,31 | 2,10 |
| 10 | 5,06 | 3,76 | 2,94 | 2,70 | 2,53 | 2,41 | 2,26 | 2,06 |

**Valorile lui $k_p''$ nedepinzînd de curbură, sînt date în tabela următoare, în funcţie de raportul $\frac{b}{a}$.**

| $\frac{b}{a}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 0.8 |
|---|---|---|---|
| $k_p''$ | 5,73 | 4,06 | 2,83 |

În calculele de proiectare a arcurilor de întindere sau de compresiune se folosesc, pentru cazurile unghiului pantei de înclinare $\alpha \approx 8°-10°$, relații aproximative acoperitoare, care țin seama de faptul că valorile eforturilor unitare în punctele periculoase să nu depășească limitele admisibile. Deoarece efortul principal maxim este efortul dat de momentul de răsucire produs de forța axială, iar celelalte eforturi fiind neglijabile, ținînd seama de relația (6.40):

$$\tau_{max}=k\tau_0, \leqslant \tau_a,$$

unde

$$\tau_0 = \frac{M_t}{W_p} \tag{6.45}$$

și $\tau_a$ este rezistența admisibilă.

Valorile coeficientului $k$ se stabilesc în funcție de valoarea raportului de formă $j=\frac{D}{d}$ cu relația.

$$k=\frac{4j+2}{4j-2}. \tag{6.46}$$

Pentru calculele preliminarii se poate lua $k=1,2...1,4$.

Pentru dimensionarea arcurilor cu secțiune circulară, pătrată sau dreptunghiulară, se folosesc relațiile date în tabela 6.6

În această tabelă, în afară de relațiile eforturilor unitare maxime $\tau_0$ și a sarcinii maxime $P_{max}$, pe care o suportă arcul, se dau relațiile pentru săgeata $f=\frac{P}{c}$; rigiditatea arcului $c=\frac{P}{f}=\frac{4C}{\pi d^3 n}$, precum și energia potențială totală acumulată de arc

$$L=\frac{Pf}{2}.$$

Coeficienții $\Delta$ și $\varphi$ din aceste relații sînt dați de tabela 6.7.

Arcurile destinate acumulării unei cantități de energie $W_0$ trebuie să fie încărcate de la montajul inițial cu o sarcină $P_{min}$, astfel că expresia cantității de energie este următoarea:

$$W_0=\frac{P_{max}+P_{min}}{2}x, \tag{6.47}$$

unde cursa de lucru

$$x=\frac{P_{max}+P_{min}}{c}. \tag{6.48}$$



La proiectarea arcurilor elicoidale cilindrice de întindere cu spire de secțiune circulară se folosesc umătoarele relații de calcul: efortul maxim admisibil

$$\tau_{max}=k\frac{P_{max}D}{2W_p}=\frac{8k\,P_{max}\,D}{\pi d^3}=\frac{8k\,P_{max}\,j}{\pi d^2}\leqslant\tau_a; \tag{6.49}$$

încărcarea maximă admisă

$$P_{max}=\frac{\pi d^3}{8kD}\tau_a=\frac{\pi d^2}{8kj}\tau_a; \tag{6.50}$$

săgeata maximă

$$f_{max}=\frac{8P_{max}D^3n}{Gd^4}; \tag{6.51}$$

săgeata la 1 kgf pentru o spiră

$$f'=\frac{8j^3}{Gd}; \tag{6.51 a}$$

diametrul sîrmei $d=1,6\sqrt{\frac{kP_{max}j}{\tau_a}}$; (6.52)

diametrul mediu al arcului

$$D=jd; \tag{6.53}$$

lungimea porțiunii active a arcului complet comprimat

$$H=nd=\frac{Gfk}{\pi\tau_a j^2}. \tag{6.54}$$

*În cazul arcurilor de întindere* trebuie avut în vedere faptul că la execuție ele trebuie să se înfășoare astfel ca spirele să fie în contact între ele; În acest scop, la execuție sîrma este răsucită și îndoită, încît spirele să se apese una pe alta. Caracteristica arcului la întindere se poate considera liniară (fig. 6.20).

Pînă la o anumită mărime a forței de întindere $P=P_0$, denumită forța de întindere prealabilă, apăsarea între spire există, dar scade în intensitate treptat pînă cînd dispare. Dacă forța de întindere crește, arcul continuă să se deformeze avînd rigiditatea (caracteristica) unui arc fără apăsare între spire.

Mărimea forței $P_0$ se determină cu relațiile:

$$P_0\approx\frac{P_{lim}}{3}\text{ pentru } d<5\text{ mm};$$
$$P_0\approx\frac{P_{lim}}{4}\text{ pentru } d>5\text{mm}. \tag{6.55}$$

Forţa de întindere poate creşte pînă la o sarcină limită $P_{lim}$ care se stabileşte, în funcţie de sarcina maximă, pe baza relaţiei:

$$P_{lim} \approx (1,05...1,2)\ P_{max}. \tag{6.56}$$

*Tabela 6.7*

**Coeficienţii auxiliari din relaţiile pentru calculul arcurilor de întindere-compresiune cu spire de secţiune dreptunghiulară**

| $\frac{a}{b}$ sau $\frac{b}{a}$ | $\xi$ | $\Delta$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|
| 1,0 | 2,404 | 5,567 | 0,154 |
| 1,5 | 1,442 | 2,670 | 0,136 |
| 1,75 | 1,195 | 2,086 | 0,132 |
| 2,0 | 1,016 | 1,713 | 0,131 |
| 2,5 | 0,775 | 1,256 | 0,133 |
| 3,0 | 0,625 | 0,995 | 0,135 |
| 4,0 | 0,442 | 0,698 | 0,142 |
| 6,0 | 0,278 | 0,439 | 0,151 |
| 10,0 | 0,160 | 0,254 | 0,157 |

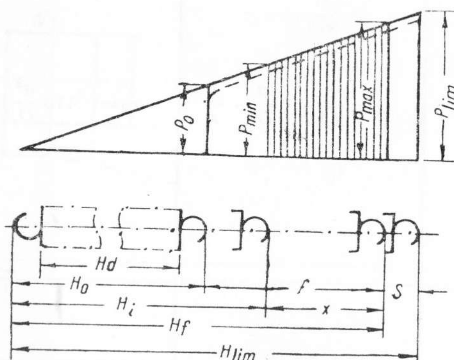


Fig. 6.20

La această sarcină arcul are o lungime $H_{lim}$, care este lungimea maximă admisibilă.

Arcul trebuie astfel montat, încît la depăşirea lungimii $H_{lim}$, respectiv a forţei limită $P_{lim}$, întinderea mai departe a arcului să fie oprită prin limitatoare de cursă.

Pentru studiul arcului de întindere mai prezintă interes şi mărimile:

sarcina maximă utilă, pe baza căreia se face calculul de rezistenţă al arcului, $P_{max}$; sarcina minimă, care se stabileşte în funcţie de modul de lucru al arcului şi practic depinde de modul de montare al arcului. $P_{min}$; lungimea arcului corespunzătoare sarcinii maxime, $H_f$; $H_i$, lungimea arcului corespunzătoare sarcinii minime, cursa de lucru, $x$; $x=nf'\,(P_{max}-P_{min})$;

cursa de reglare, $s$;

lungimea ocupată de spirele active, $H_d$; $H_d=nd$;



lungimea arcului descărcat, $H_0$;

lungimea totală a arcului descărcat, $H'_0$; $H'_0=nd+z$, unde $z$ este lungimea cîrligelor;

lungimea sîrmei necesare executării arcului $l_s$;

$$l_s=\frac{\pi D n}{\cos\alpha}+l_z, \tag{6.57}$$

unde $l_z$ este lungimea sîrmei necesare executării cîrligelor de prindere.

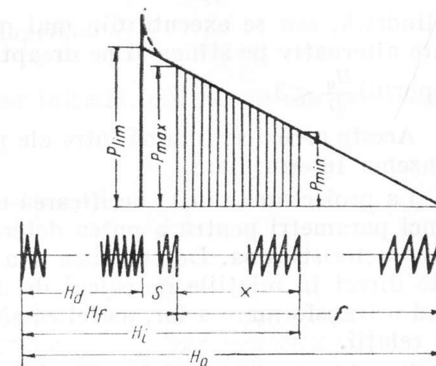


Fig. 6.21

*În cazul arcurilor supuse la compresiune* trebuie avut în vedere faptul că ele se execută cu jocuri $\delta_0$ între spire, pentru ca arcul să aibă săgeată. În fig. 6.21 este reprezentată caracteristica arcului, care este liniară pe cea mai mare porţiune a ei. În vecinătatea sarcinii $P_{lim}$ ea poate fi neliniară.

Se remarcă în acest caz, mărimile:

— sarcina maximă (de calcul) $P_{max}$; $P_{max} \approx (0,8...0,9)\ P_{lim}$;

— lungimea arcului comprimat de $P_{max}$, $H_f$;

— sarcina minimă de lucru care se stabileşte în funcţie de modul de montare al arcului $P_{min}$;

— sarcina necesară pentru a comprima arcul, astfel încît spirele să fie în contact, $P_{lim}$;

— lungimea de montare corespunzătoare sarcinii $P_{min}$, $H_i$;

— lungimea arcului comprimat pînă la atingerea spirelor, $H$; $H=(n_t-0,5)d$;

— numărul total de spire active şi moarte, $n_t$;

— lungimea arcului neîncărcat, $H_0$; $H_0=H+n(p-d)$;

— jocul între spire la sarcina maximă, $\delta_n=\frac{S}{n}\approx(0,1\ldots0,2)\frac{f}{n}$;

— pasul, $p$; $p=d+\frac{f_{max}}{n}+\delta_n$; mărimea pasului se ia între $\frac{D}{3}$ şi $\frac{D}{2}$;

— lungimea sîrmei necesară executării arcului, $l_s$;

$$l_s=\frac{\pi D n_t}{\cos\alpha}. \tag{6.57, a}$$

Unghiul de pantă al spirei arcului neîncărcat se ia

$$\alpha=6^\circ...9^\circ.$$

Deoarece în cazul arcurilor de compresiune lungi apare pericolul ca acestea să-şi piardă stabilitatea, trebuie ca $\frac{H_0}{D} \leqslant 3$.

Dacă raportul $\frac{H_0}{D} > 3$, arcul se montează pe un dorn sau într-o cămaşă cilindrică, sau se execută din mai multe arcuri componente cu înfăşurare alternativ pe stînga şi pe dreapta, astfel ca pentru fiecare să existe raportul $\frac{H_0}{D} < 3$.

Aceste arcuri se îmbină între ele prin inele de centrare care formează reazeme intermediare.

La proiectarea sau la verificarea unui arc este necesar să se cunoască cinci parametri pentru a putea determina toate elementele constructive şi caracteristica sa. De obicei se dau unele condiţii care nu pot fi folosite direct în relaţiile de calcul de dimensionare stabilite şi este necesară o transformare a lor, astfel ca să se ajungă la parametrii care apar în relaţii.

De obicei se dau:

— materialul utilizat la executarea arcului, în funcţie de condiţiile de lucru ale arcului;

— diametrul locaşului (carcasei) arcului şi diametrul axului pe care se montează arcul;

— înălţimea iniţială a arcului $H_1$;

— înălţimea finală a arcului $H_2$;

— unele date despre sarcină (forţa iniţială, forţa finală sau forţa medie, sau energia potenţială între două înălţimi determinate ale arcului).

Aceste date trebuie prelucrate astfel încît să poată fi introduse în relaţiile de calcul date în tabela 6.6.

Astfel, diametrul exterior al arcului, ţinînd seama de creşterea sa în timpul comprimării, se ia în raport cu diametrul carcasei dat (fig. 6.22):

$$D_e = D + d = 0{,}96\ D_c. \tag{6.58}$$

De asemenea trebuie avută în vedere lungimea cerută de construcţia arcului complet comprimat;

$$H \approx nd.$$

În cazul arcurilor cu puţine spire, cu capetele tăiate, se ia constructiv $\frac{H}{H_2} \approx 0{,}80$.



În acest fel se cunosc:

— modulul de elasticitate $G$;

— diametrul exterior, $D_e$, al spirei şi se poate aproxima diametrul mediu, $D$ al spirei;

— lungimea arcului complet comprimat $H$;

— cursa $x = H_1 - H_2$;

— sarcina dată care poate fi cea iniţială, cea finală sau cea medie ($P_1$, $P_2$ sau $P_m$).

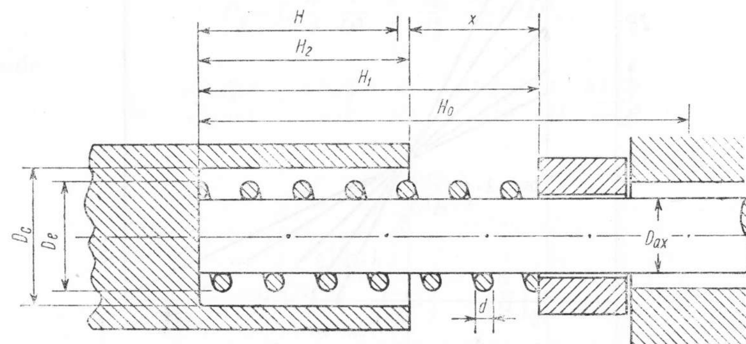



Fig. 6.22

Din aceşti cinci parametri, patru sînt determinaţi, iar al cincilea nefiind determinat, permite realizarea multor variante. Pentru a determina complet cei cinci parametri este necesar să se introducă un coeficient, denumit factor de precomprimare, dat de relaţia:

$$\lambda = \frac{f_1}{x}, \tag{6.59}$$

unde $f_1$ este săgeata iniţială a arcului.

Acest factor de precomprimare oglindeşte condiţiile de lucru ale arcului. Astfel, dacă $\lambda = 0$, este vorba despre un arc a cărui săgeată iniţială este nulă, iar dacă $\lambda = 1$, arcul are o săgeată iniţială egală cu săgeata normală de lucru. Variaţia lui $\lambda$ atrage după sine variaţia eforturilor unitare. În fig. 6.23 se poate vedea corelaţia dintre sarcină şi săgeată în funcţie de factorul de precomprimare pentru o sarcină iniţială $P_1$ dată.

Dacă sarcina se aplică lent, coeficienţii de rigiditate la sarcină şi la efort unitar tangenţial $\tau_0$ sînt constanţi, astfel că pentru două poziţii ale capătului arcului încărcat cu o sarcină constantă se poate scrie relaţia:

$$\tau_1 = \frac{f_1}{f_2}\ \tau_2. \qquad (6.60)$$

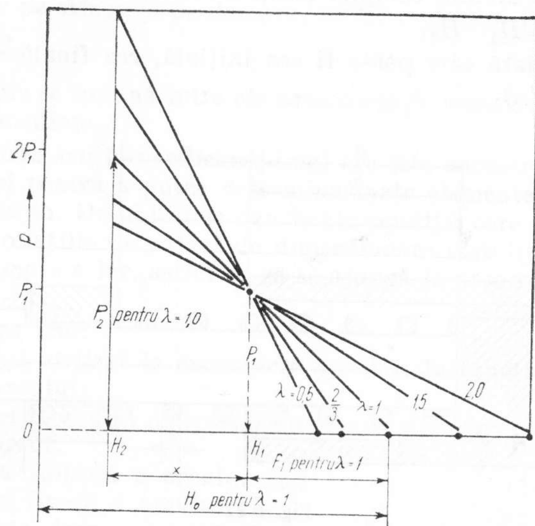



Fig. 6.23

În acest caz, notînd cursa cu $x = f_2 - f_1$ se obţine:

$$\tau_1 = \frac{\lambda}{1+\lambda}\ \tau_2. \qquad (6.61)$$

Pentru a găsi soluţia optimă de construcţie şi montare a arcului este necesar să se determine variaţia mărimilor eforturilor limită $\tau_1$ şi $\tau_2$ în funcţie de factorul de precomprimare.

Folosind relaţiile de rigiditate la sarcină şi la eforturi unitare tangenţiale $\tau_0$ pentru arcuri cu secţiune circulară (tabela 6.6), se poate determina efortul unitar $\tau$ în funcţie de $G$, $D$, $H$, $P$ şi $x$ (cei cinci parametri cunoscuţi). Adică, folosind relaţiile:

$$c = \frac{P}{f} = \frac{G}{8}\ \frac{d^4}{D^3}\ \frac{1}{n};$$

$$c_1 = \frac{\tau_0}{f} = \frac{G}{\pi}\ \frac{d}{D^2}\ \frac{1}{n} \qquad (6.62)$$



şi adaptîndu-le pentru situaţia comprimării maxime, ele devin:

$$\frac{P_2}{f_2} = \frac{G}{8}\ \frac{d^4}{D^3}\ \frac{1}{n},$$

$$\frac{\tau_{02}}{f_2} = \frac{G}{\pi}\ \frac{d}{D^2}\ \frac{1}{n}\ \text{sau} \qquad (6.63)$$

$$d = \frac{\tau_{02}}{f_2}\ \frac{\pi}{G}\ nD^2.$$

Făcînd calculul rezultă:

$$P_2 = f_2\,\frac{G}{8}\ \frac{1}{D^3}\ \frac{1}{n}\ \frac{\tau_{02}^4}{f_2^4}\ \frac{\pi^4}{G^4} n^4 D^8, \qquad (6.64)$$

de unde

$$\tau_{02}^4 = \frac{8P_2 f_2^3 G^3}{\pi^4 D^5 n^3} = \frac{8P_2 f_2^3 G^3}{\pi^4 D^5}\ \frac{d^3}{H^3} = \frac{8P_2 f^3 G}{\pi^4 D^5}\ \frac{1}{H^3}\ \frac{8P_2 D}{\pi\tau_{02}}. \qquad (6.65)$$

sau

$$\tau_{02}^5 = \frac{8^2}{\pi^5}\ \frac{P_2^2 f_2^3 G^3}{D^4 H^3}, \qquad (6.66)$$

sau

$$\tau_{02} = 0{,}731\ G^{0,6} \left(\frac{P_2}{D^2}\right)^{0,4} \left(\frac{f_2}{H}\right)^{0,6}. \qquad (6.67)$$

În această expresie, elementul care condiţionează relaţia este forţa $P_2$. De regulă, în aplicaţii practice se impun: forţa limită iniţială $P_1$, sarcina finală $P_2$ sau sarcina medie $P_m = \frac{P_1 + P_2}{2}$.

Pentru a analiza comportarea arcului în funcţie de sarcina $P_1$, este necesar să se determine efortul $\tau_2$ în funcţie de $P_1$ şi de factorul de precomprimare.

Ştiind că

$$\frac{P_2}{f_2} = \frac{P_1}{f_1},$$

$$f_2 = f_1 + x \quad \text{şi} \quad \lambda = \frac{f_1}{x}, \qquad (6.68)$$

relaţia lui $\tau_{02}$ în funcţie de $P_1$ devine:

$$\tau_{02} = 0{,}731\,G^{0,6} \left(\frac{P_1}{D^2}\right)^{0,4} \left(\frac{x}{H}\right)^{0,6} \frac{1+\lambda}{\lambda^{0,4}}, \qquad (6.69)$$

în care $\lambda$ se alege funcţie de condiţiile de funcţionare ale arcului.

Valoarea minimă a lui $\tau_2$ corespunde lui $\lambda = \frac{2}{3}$.

În fig. 6.24 se arată calitativ variaţia mărimilor $\tau_2$ şi $\tau_1$, în funcţie de factorul de precomprimare, pentru o sarcină iniţială $P_1$, precum şi mărimea necesară a diametrului sîrmei $d$ pentru diferite valori ale factorului de comprimare. Din diagramă se poate trage concluzia că

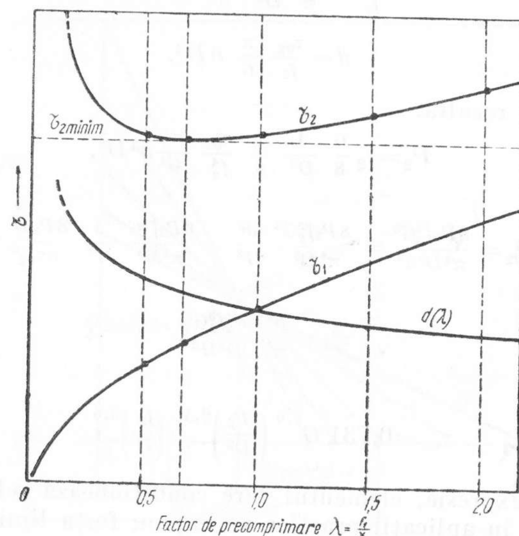



Fig. 6.24

arcul este solicitat convenabil pentru o precomprimare a cărui factor $\lambda$ este cuprins între 0,5 şi 1,5, cea mai convenabilă situaţie fiind pentru $\lambda \approx 1$.

Dacă se impune sarcina finală, efortul $\tau_2$ în funcţie de factorul de comprimare

$$\tau_{02}=0{,}731\ G^{0{,}6}\left(\frac{P_2}{D^2}\right)^{0{,}4}\left(\frac{x}{H}\right)^{0{,}6}(1+\lambda)^{0{,}6}. \qquad (6.70)$$

Se poate observa că minimul acestei expresii are loc pentru $\lambda=0$. În fig. 6.25 se reprezintă calitativ variaţia eforturilor $\tau$, în funcţie de factorul de precomprimare $\lambda$, cînd este impusă sarcina finală (curba continuă).



Dacă se impune o anumită sarcină medie: $P_m=\frac{P_1+P_2}{2}$, ţinînd seamă că $f_2=f_1+x$ şi $\frac{f_1}{x}=\lambda$, se obţine,:

$$\tau_{02}=0{,}731\ G^{0{,}6}\left[\frac{P_m}{D^2}\right]^{0{,}4}\left[\frac{x}{H}\right]^{0{,}6}\frac{1+\lambda}{(0{,}5+\lambda)^{0{,}4}}, \qquad (6.71)$$

a cărui valoare minimă are loc pentru $\lambda=0$, adică

$$\tau_{02\,min}=0{,}965^{0{,}6}\left(\frac{P_m}{D^2}\right)^{0{,}4}\left(\frac{x}{H}\right)^{0{,}6}. \qquad (6.72)$$

Variaţia lui $\tau_2$ funcţie de $\lambda$ este dată în fig. 6.25, prin curba linie-punct, cînd este impusă sarcina medie.

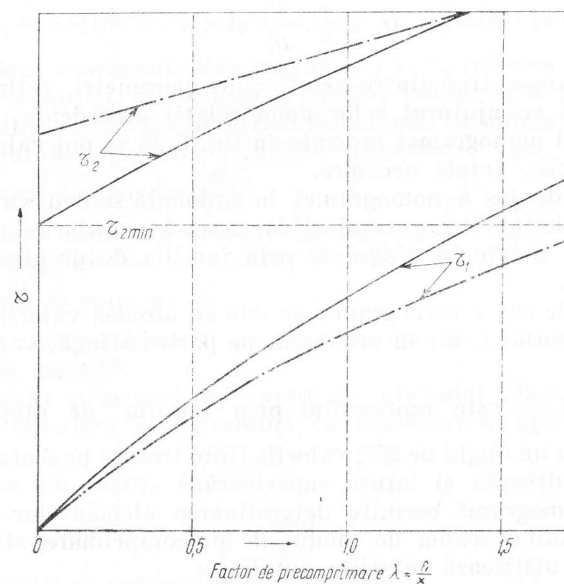



Fig. 6.25

În concluzie, se poate reţine ideea foarte importantă, potrivit căreia la arcurile la care se condiţionează forţa finală $P_2$ sau forţa medie este bine ca factorul de precomprimare să fie cît mai mic, cît mai aproape de zero.

Transformînd aceste relaţii în mod convenabil, ele se pot aduce la o formă care permite transpunerea calculelor în nomograme, care permit un calcul expeditiv de proiectare al arcurilor.

Ştiind că: $D_e = D + d$,

$$H = dn,$$

$$j = \frac{D}{d},$$

relaţiile rigidităţilor de sarcină şi de efort unitar $\tau_0$ se pot scrie sub forma:

$$\frac{P}{D_e^2} = \frac{G}{8}\,\frac{f}{H}\,\frac{1}{j^2(j+1)^2}\,;\quad \tau_0 = \frac{G}{\pi}\,\frac{f}{H}\cdot\frac{1}{j^2}. \tag{6.73}$$

Grupînd factorii componenţi ca în aceste relaţii se observă că apar alţi cinci parametri importanţi în calculul arcului:

$$G,\ j,\ \frac{f}{H},\ \frac{P}{D_e^2}\ \text{şi}\ \tau_0.$$

Dacă se cunosc trei dintre aceşti cinci parametri, ceilalţi doi pot fi determinaţi cu ajutorul celor două relaţii precedente.

Cu ajutorul nomogramei indicate în fig. 6.26 se pot calcula, în mod foarte expeditiv, datele necesare.

În partea de jos a nomogramei în ordonată se dau valorile modulului de elasticitate transversal şi în abscisă — valorile parametrului $f/H$, care sînt redate în diagramă prin familia de drepte înclinate la stînga cu 45°.

În partea de sus a nomogramei se dau în abscisă valorile raportului de formă al arcului $j$, iar în ordonată, pe partea stîngă, valorile efortului unitar $\tau_0$.

Parametrul $\frac{P}{D_e^2}$ este reprezentat prin familia de drepte înclinate spre dreapta cu un unghi de 55°, valorile fiind trecute pe scara de pe latura verticală din dreapta şi latura superioară.

Această nomogramă permite determinarea elementelor constructive ale arcului, ţinînd seamă de modul de precomprimare al arcului. În acest scop se utilizează relaţiile auxiliare:

$$\lambda = \frac{f_1}{x};$$

$$\frac{f_2}{H} = (\lambda+1)\,\frac{x}{H}\,; \tag{6.74}$$

$$\frac{P_2}{D_e^2} = \frac{(\lambda+1)}{\lambda}\,\frac{P_1}{D_e^2},\ \text{cazul în care se impune sarcina iniţială;} \tag{6.75}$$



$$\frac{P_2}{D_e^2} = \frac{(\lambda+1)}{\lambda+0{,}5}\cdot\frac{P_m}{D_e^2}\ \text{cazul în care se impune sarcina medie.} \tag{6.76}$$

Pentru determinarea parametrilor corespunzători unui arc este necesar să se cunoască: $G$, $D_e$, $H$, $x = H_1 - H_2$ şi $P_1$, $P_m$ sau $P_2$.

Prin alegerea unui factor de precomprimare $\lambda$ se determină săgeata specifică $\frac{f_2}{H}$, corespunzătoare încărcării maxime.

Se determină în diagrama inferioară punctul de coordonate $\left(G, \frac{f_2}{H}\right)$ corespunzătoare arcului căutat.

Se determină parametrul sarcinii specifice pentru încărcarea maximă; $\frac{P_2}{D_e^2}$. Intersectînd liniile înclinate la stînga cu cele înclinate la dreapta, corespunzătoare punctului de coordonate $\left(G, \frac{f_2}{H}\right)$ şi sarcinii specifice a arcului $\frac{P^2}{D_e^2}$, se obţine în partea superioară a diagramei punctul de intersecţie, ale cărui coordonate dau mărimile $j$ şi $\tau_0$ (abscisa fiind raportul de formă al arcului $j$, iar ordonata, efortul unitar $\tau_0$ în spira arcului). O dată stabiliţi aceşti parametri, dimensiunile şi datele principale ale arcului se stabilesc pe baza relaţiilor următoare:

— diametrul sîrmei $d = \frac{D_e}{j+1}$

— diametrul mediu al arcului $D = D_e - d$;

— diametrul interior al arcului $D_i = D_e - 2\,d$;

— numărul de spire $n = \frac{H}{d}$.

O altă metodă se bazează pe folosirea constantelor de sarcină şi a constantei de săgeată.

Dimensiunile principale ale unui arc elicoidal cilindric din sîrmă de secţiune circulară se determină cu următoarele relaţii:

$$\text{— sarcina de lucru, } P = \frac{\pi d^3 \tau_0}{8D}\,;$$

$$\text{— săgeata pentru o spiră, } f = \frac{8PD^3}{Gd^4}. \tag{6.77}$$

Aceste relaţii se pot aduce sub forma:

$$PD = \frac{\pi d^3 \tau_0}{8} = Q;$$

$$f = \frac{8PD^3}{Gd^4} = \frac{8PjD^2}{Gd^3} = \frac{\pi\tau_0 jD}{G} = SjD, \tag{6.78}$$

unde $S = \frac{\pi\tau_0}{G}$ este constanta săgeţii. (6.79)

Valorile constantelor $Q$ şi $S$ depind de materialul şi de diametrul sîrmei din care este executat arcul, ele sînt date în tabelele 6.8 şi 6.9. Pentru a obţine valorile maxime ale eforturilor unitare, pe baza acestor relaţii trebuie să se ţină seama de relaţia dată anterior:

$$\tau_{max}=k\tau_0\leqslant\tau_a.$$

*Tabela 6.8*

**Valorile constantei *S***

| Materialul sîrmei | Efortul unitar perpendicular | Modulul de elasticitate transversal, $G$ kgf/cm² | S |
|---|---|---|---|
| Sîrmă patentată (fost coardă de pian) | 5 000 | $8.10^5$ | 0,01964 |
| Sîrmă din oţel inoxidabil | 3 580 | $7,5\cdot10^5$ | 0,01500 |
| Sîrmă din arc din nichel | 4 300 | $7,9\cdot10^5$ | 0,01714 |
| Sîrmă de arc din monel | 3 580 | $6,8\cdot10^5$ | 0,01654 |
| Sîrmă de arc din bronz cu beriliu | 2 500 | $5,15\cdot10^5$ | 0,01527 |
| Sîrmă de arc din bronz fosforos | 2 500 | $4,3\cdot10^5$ | 0,01833 |
| Sîrmă de arc din alamă | 1 790 | $3,56\cdot10^5$ | 0,01571 |

*Tabela 6.9*

**Valorile constantei Q pentru sîrmă patentată şi oţel inoxidabil, kgf.cm**

| Diametrul sîrmei, $d$, cm | Sîrmă patentată | Oţel inoxidabil | Diametrul sîrmei, $d$, cm | Sîrmă patentată | Oţel inoxidabil |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| 0,025 | 0,0370 | 0,0265 | 0,140 | 6,170 | 4,420 |
| 0,028 | 0,0494 | 0,0352 | 0,150 | 7,625 | 5,450 |
| 0,032 | 0,0640 | 0,0457 | 0,160 | 4,270 | 6,640 |
| 0,033 | 0,0815 | 0,0582 | 0,170 | 11,17 | 7,970 |
| 0,036 | 0,102 | 0,0727 | 0,180 | 13,28 | 9,470 |
| 0,041 | 0,152 | 0,108 | 0,190 | 15,65 | 11,20 |
| 0,046 | 0,216 | 0,154 | 0,202 | 18,98 | 13,50 |
| 0,051 | 0,297 | 0,212 | 0,216 | 22,8 | 16,25 |
| 0,056 | 0,396 | 0,282 | 0,229 | 27,0 | 19,35 |
| 0,061 | 0,514 | 0,366 | 0,241 | 31,9 | 22,7 |
| 0,066 | 0,653 | 0,465 | 0,254 | 37,1 | 26,5 |
| 0,074 | 0,904 | 0,656 | 0,269 | 41,2 | 31,6 |
| 0,079 | 1,107 | 0,789 | 0,285 | 52,1 | 32,5 |
| 0,084 | 1,342 | 0,948 | 0,300 | 61,0 | 43,6 |
| 0,089 | 1,590 | 1,360 | 0,315 | 70,7 | 50,5 |
| 0,094 | 1,880 | 1,345 | 0,330 | 81,5 | 58,1 |
| 0,099 | 2,185 | 1,573 | 0,350 | 97,5 | 69,6 |
| 0,104 | 2,560 | 1,828 | 0,370 | 115,8 | 82,5 |
| 0,109 | 2,955 | 2,109 | 0,390 | 135,0 | 96,7 |
| 0,114 | 3,390 | 2,410 | 0,410 | 157,6 | 112,7 |
| 0,119 | 3,845 | 2,760 | 0,432 | 182,5 | 130,5 |
| 0,124 | 4,358 | 3,120 | 0,460 | 216,5 | 154,5 |
| 0,129 | 4,925 | 3,520 | | | |



La proiectare, utilizînd relaţiile (6.78) şi (6.79) şi tabelele 6.8, 6.9 şi 6.10 cu valorile constantelor $Q$ şi $S$, se pot determina dimensiunile principale ale arcului.

*Tabela 6.10*

**Valorile constantei *Q* pentru nichel, monel, bronz şi alamă, kgf.cm**

| Diametrul sîrmei, $d$, cm | Nichel | Monel | Bronz cu beriliu şi bronz fosforos | Alamă |
|---|---|---|---|---|
| 0,025 | 0,0319 | 0,0265 | 0,0185 | 0,0132 |
| 0,028 | 0,0459 | 0,0382 | 0,0268 | 0,0191 |
| 0,032 | 0,0636 | 0,0530 | 0,0371 | 0,0267 |
| 0,036 | 0,0910 | 0,0758 | 0,0532 | 0,0379 |
| 0,040 | 0,0128 | 0,106 | 0,0747 | 0,0533 |
| 0,045 | 0,182 | 0,152 | 0,106 | 0,0760 |
| 0,051 | 0,258 | 0,215 | 0,150 | 0,107 |
| 0,057 | 0,367 | 0,306 | 0,214 | 0,153 |
| 0,064 | 0,515 | 0,430 | 0,301 | 0,214 |
| 0,072 | 0,735 | 0,614 | 0,430 | 0,307 |
| 0,081 | 1,042 | 0,868 | 0,607 | 0,435 |
| 0,091 | 1,475 | 1,225 | 0,859 | 0,612 |
| 0,102 | 2,085 | 1,735 | 1,215 | 0,867 |
| 0,115 | 2,960 | 1,460 | 1,726 | 1,232 |
| 0,129 | 4,180 | 3,470 | 2,430 | 1,736 |
| 0,145 | 5,940 | 4,940 | 3,460 | 2,460 |
| 0,163 | 8,380 | 6,970 | 4,890 | 3,500 |
| 0,183 | 10,96 | 9,880 | 6,940 | 4,940 |
| 0,205 | 16,82 | 14,00 | 9,800 | 7,000 |
| 0,230 | 23,55 | 19,80 | 13,86 | 9,880 |
| 0,259 | 33,70 | 28,10 | 19,65 | 14,05 |
| 0,290 | 47,80 | 39,80 | 27,87 | 18,90 |
| 0,326 | 67,60 | 56,40 | 39,50 | 29,10 |
| 0,366 | 95,50 | 79,70 | 55,80 | 39,90 |
| 0,410 | 135,0 | 112,5 | 78,80 | 55,00 |
| 0,462 | 191,5 | 160,0 | 111,4 | 79,70 |
| 0,518 | 272,0 | 226,0 | 158,6 | 113,0 |
| 0,580 | 384,0 | 320,0 | 224,0 | 160,0 |

În funcţie de forma capetelor arcului de compresiune se pot folosi relaţiile din tabela 6.11.

În cazul arcului de întindere este necesar să se verifice rezistenţa capetelor (cîrligului) de prindere al arcului.

În fig. 6.27 sînt date două variante constructive pentru forma capetelor arcurilor de întindere. Punctele în care se produc eforturile periculoase sînt indicate în figură cu literele $A$ şi $A'$. În punctul $A$ efortul periculos este efortul unitar de răsucire şi este dat de relaţia:

$$\tau=\frac{16Pr}{\pi d^3}\,\frac{4j_1-1}{4j_1-4}, \tag{6.80}$$

unde

$$j_1 = \frac{2r}{d};$$

iar în $A'$ efortul unitar periculos de încovoiere este dat de relaţia:

$$\sigma = \frac{32PrK_1}{\pi^3 d} + \frac{4P}{\pi d^2}. \tag{6.81}$$

Valorile coeficientului $K_1$ sînt date în diagrama din fig. 6.28.

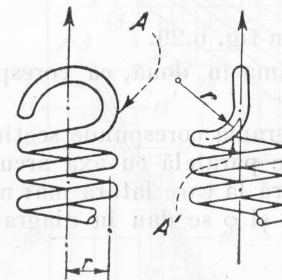


Fig. 6.27

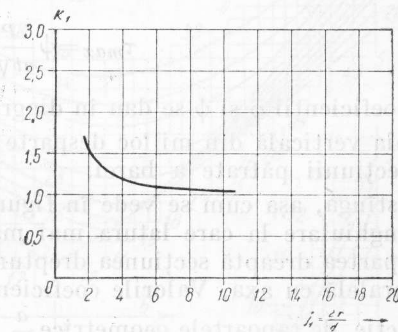


Fig. 6.28

## 6.3. Calculul arcurilor de întindere-compresiune de secţiune dreptunghiulară

În cazul sarcinilor mari, pentru executarea arcurilor puternice se utilizează bare de secţiune dreptunghiulară sau de secţiune pătrată.

Pentru calculele aproximative de dimensionare se utilizează relaţiile de calcul date în tabela 6.6.

Pentru un calcul de rezistenţă mai precis este necesar să se ţină seamă de influenţa curburii spirelor cu secţiune dreptunghiulară şi de raportul laturilor secţiunii, precum şi de poziţia secţiunii faţă de axa arcului.

În general, eforturile unitare maxime apar în mijlocul laturii interioare a secţiunii paralele cu axa longitudinală a arcului. În foarte puţine cazuri, şi aceasta numai în cazul unui raport mare între latura

perpendiculară pe axă și cea paralelă cu axa, se poate întîmpla ca punctul periculos, de efort unitar maxim, să apară pe latura superioară, perpendiculară pe axa secțiunii spirei.

În general, pentru calculele de proiectare curente, folosirea relațiilor din tabela 6.6 și a valorilor coeficienților necesari din tabela 6.7 sînt satisfăcătoare.

Pentru un calcul expeditiv, se dau expresiile săgeții și efortului unitar tangențial maxim:

$$f=\varphi\frac{nD^3P}{Ga^2b^2};$$

$$\tau_{max}=\psi\frac{PD}{ab\sqrt{ab}}, \qquad (6.82)$$

unde coeficienții $\varphi$ și $\psi$ se dau în diagrama din fig. 6.29.

Linia verticală din mijloc desparte diagrama în două, ea corespunzînd secțiunii pătrate a barei.

În stînga, așa cum se vede în figură, diagrama corespunde secțiunii dreptunghiulare la care latura mai mare este paralelă cu axa arcului, iar în partea dreaptă secțiunea dreptunghiulară la care latura mai mică este paralelă cu axa. Valorile coeficienților $\psi$ și $\varphi$ se dau în diagramă, în funcție de rapoartele geometrice $\frac{a}{b}$ și $\frac{D}{a}$.

În general, arcurile elicoidale cilindrice din bară cu secțiune dreptunghiulară sînt utilizate ca arcuri de compresiune. Determinarea dimensiunilor și modul de calcul de proiectare indicat pentru arcurile executate din sîrmă cu secțiune circulară sînt valabile și în acest caz. Lungimea arcului comprimat la maximum este dat de relația:

$$H_c=(n_t-0{,}5)b, \qquad (6.83)$$

unde $n_t$ este numărul total de spire.

Pasul

$$p=b+\frac{f_{max}}{n}+\delta_p, \qquad (6{,}84)$$

unde $\delta_p$ este jocul între spire; $\delta_p=(0{,}12...0{,}15)\ b$.

Valorile maxime sînt indicate pentru arcuri care lucrează la oboseală.

Bara din care se execută arcul nu trebuie să depășească lungimea de 10–12 m.

Pentru a realiza ușor formarea și rectificarea spirelor moarte, trebuie avut în vedere că la un capăt, după strunjire sau după rectificare, spira



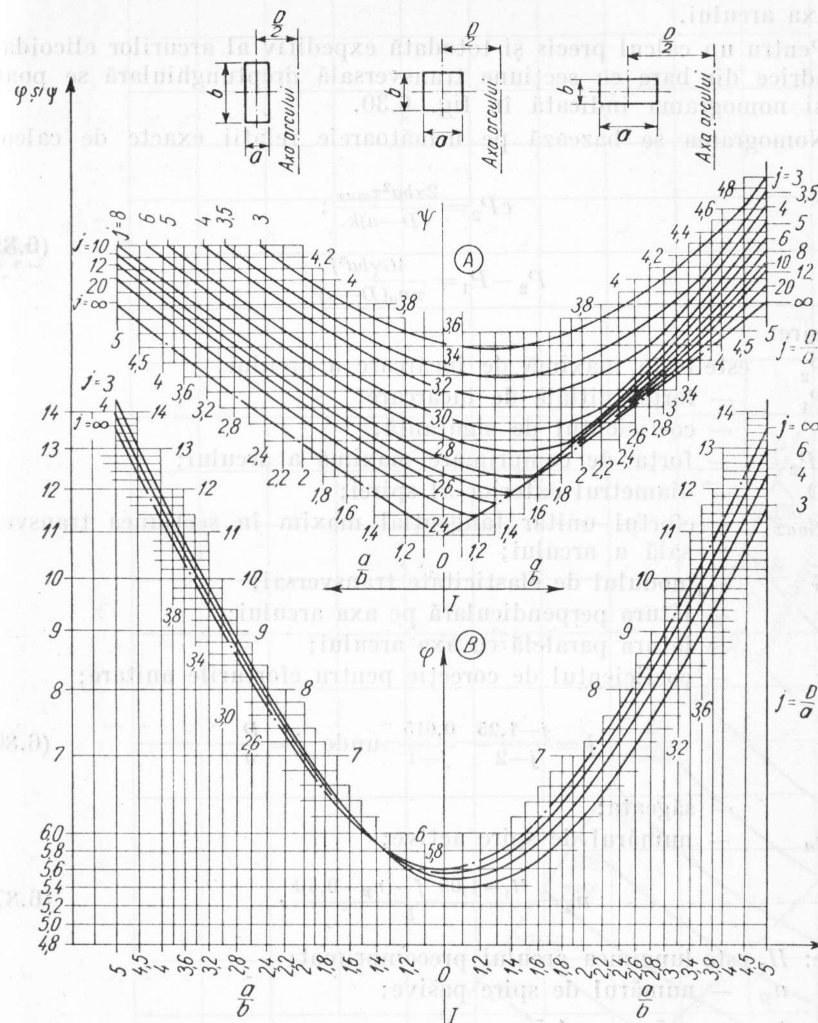



Fig. 6.29

trebuie să aibă o înălţime egală cu un sfert din latura secţiunii paralelă cu axa arcului.

Pentru un calcul precis şi totodată expeditiv al arcurilor elicoidale cilindrice din bare cu secţiune transversală dreptunghiulară se poate folosi nomograma indicată în fig. 6.30.

Nomograma se bazează pe următoarele relaţii exacte de calcul:

$$cP_2 = \frac{2\alpha ba^2\tau_{max}}{(D-a)k};$$

$$P_2 - P_1 = \frac{4G\gamma ba^3 f}{\pi n_a (D-a)^3} \tag{6.85}$$

în care:

$P_2$ este forţa maximă de încărcare a arcului;
$P_1$ — forţa iniţială de încărcare;
$c$ — coeficientul de siguranţă;
$cP_2$ — forţa de comprimare maximă a arcului;
$D$ — diametrul exterior al spirei;
$\tau_{max}$ — efortul unitar tangenţial maxim în secţiunea transversală a arcului;
$G$ — modulul de elasticitate transversal;
$a$ — latura perpendiculară pe axa arcului;
$b$ — latura paralelă cu axa arcului;
$k$ — coeficientul de corecţie pentru eforturile unitare;

$$k = \frac{j-1{,}25}{j-2}\ \frac{0{,}615}{j-1} \quad \text{unde } j = \frac{D}{a} \tag{6.86}$$

$f$ — săgeata;
$n_a$ — numărul de spire active;

$$n_a = \frac{H_1 - 1{,}05\ f - (n_p - 0{,}5)b}{b}, \tag{6.87}$$

unde: $H_1$ este lungimea arcului precomprimat;
$n_p$ — numărul de spire pasive;
pentru: $n_a < 5$, $n_p = 1{,}5$;
$n_a = 5 \ldots 10$; $n_p = 2$;
$n_a > 10$; $n_p = 2{,}5$;

$\alpha$ și $\gamma$ sînt coeficienți ai momentului de inerție polar dați în fig. 6.31, funcție de raportul $\frac{a}{b}$.

Aceste relații se pot transforma convenabil pentru folosirea nomogramei prin introducerea notațiilor $A$ și $B$:

$$A = \frac{D^2 \tau_{max}}{c P_2}; \quad B = \frac{P_2 - P_1}{D^2} \cdot \frac{H_1 - 1{,}05\, f\,(n_p - 0{,}5)\, b}{f}. \tag{6.88}$$

În nomogramă, pe laturile verticale sînt reprezentate scările pentru parametrii $A$ și $B$, iar pe latura orizontală de jos — scara raportului $\frac{a}{b}$.

Valorile pentru parametrii $B$ și $A$ sînt reprezentate în funcție de valorile raportului de formă al arcului $\frac{D}{a}$ și anume: curbele înclinate care coboară de la stînga spre dreapta corespund parametrului $B$, iar cele care urcă de la stînga spre dreapta corespund parametrului $A$. Folosind relațiile pentru $A$ și $B$ se pot determina în mod expeditiv elementele arcului.

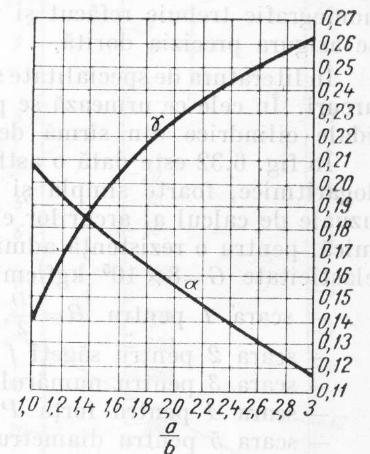


Fig. 6.31

În cazul secțiunii dreptunghiulare se produce o deformare a secțiunii în urma înfășurării arcului, astfel că ea devine trapezoidală. Baza mare a trapezului

$$b_2 = 0{,}48\, b \frac{(2D - a)}{D - a}$$

și se află la exteriorul arcului.

Pentru a realiza arcuri economice este bine să se folosească bare cu secțiune trapezoidală, a căror bază mare $b_2$ și baza mică $b_1$ să rezulte din relația:

$$b_2 = 2b - \frac{2{,}09\,(D - a)}{2D - a}; \tag{6.89}$$

$$b_1 = 2b - b_2,$$

în care $b$ este latura rezultată din calculul secțiunii dreptunghiulare, paralelă cu axa arcului.

## 6.4. Nomograme pentru calculul arcurilor elicoidale, cilindrice din sîrmă cu secțiune circulară

Pentru a efectua un calcul rapid și corect al arcurilor elicoidale, se recomandă utilizarea diagramelor, a nomogramelor, nomogramelor mecanizate, riglelor de calcul pentru arcuri etc.

La folosirea nomogramelor pentru calculul arcurilor trebuie avut în vedere faptul că precizia calculului grafic nu este prea mare și, din această cauză, pentru arcurile cu condiții de funcționare deosebite, la care caracteristica nu trebuie să admită abateri prea mari, calculul nomografic trebuie refăcut și verificat prin calculul analitic, pentru a se asigura precizia dorită.

În literatura de specialitate se întîlnesc foarte multe nomograme pentru arcuri. În cele ce urmează se prezintă numai cîteva pentru arcuri elicoidale cilindrice din sîrmă de secțiune circulară.

În fig. 6.32 este dată o astfel de nomogramă, după Dubbel, cu scări logaritmice, foarte simplă și expeditivă, întocmită pe baza relațiilor uzuale de calcul al arcurilor elicoidale cu panta de inclinare a spirelor mică, pentru o rezistență admisibilă $\tau_a=3\ 500$ kgf/cm² și un modul de elasticitate $G=8\times10^5$ kgf/cm². Această nomogramă cuprinde:

— scara *1* pentru $R=\frac{D}{2}$, cu valori de la 3 pînă la 100 mm;
— scara *2* pentru săgeți $f$ cuprinse între *1* și 200 mm;
— scara *3* pentru numărul de spire active $n_a$ de la 1 pînă la 100;
— scara *4* pentru forța $P$ de la 0,1 pînă la 1 000 kgf;
— scara *5* pentru diametrul sîrmei $d$ de la 0,5 pînă la 30 mm;
— linia de bază *6* negradată, pe care se determină punctul de legătură între scări.

Dacă pentru efortul unitar admisibil se iau alte valori decît $\tau_a=3\ 500$ kgf/cm², rezultatele obținute pentru diametrul sîrmei și numărul de spire active se corectează cu ajutorul coeficienților indicați în tabela 6.12.

Pentru a lucra cu această diagramă se procedează astfel:

Se presupune că s-a dat sarcina la care este supus arcul: $P=700$ kgf, iar diametrul mediu $D=50$ mm. Se unesc cele două valori prelungind linia pînă intersectează scara *5*, unde se citește valoarea lui $d\approx13$ mm. Valoarea săgeții dorite ($f=10$ mm) se unește, printr-o linie, care trece prin punctul determinat pe linia de bază de prima, cu scara *3* pe care se determină numărul de spire active $n_a=4$.

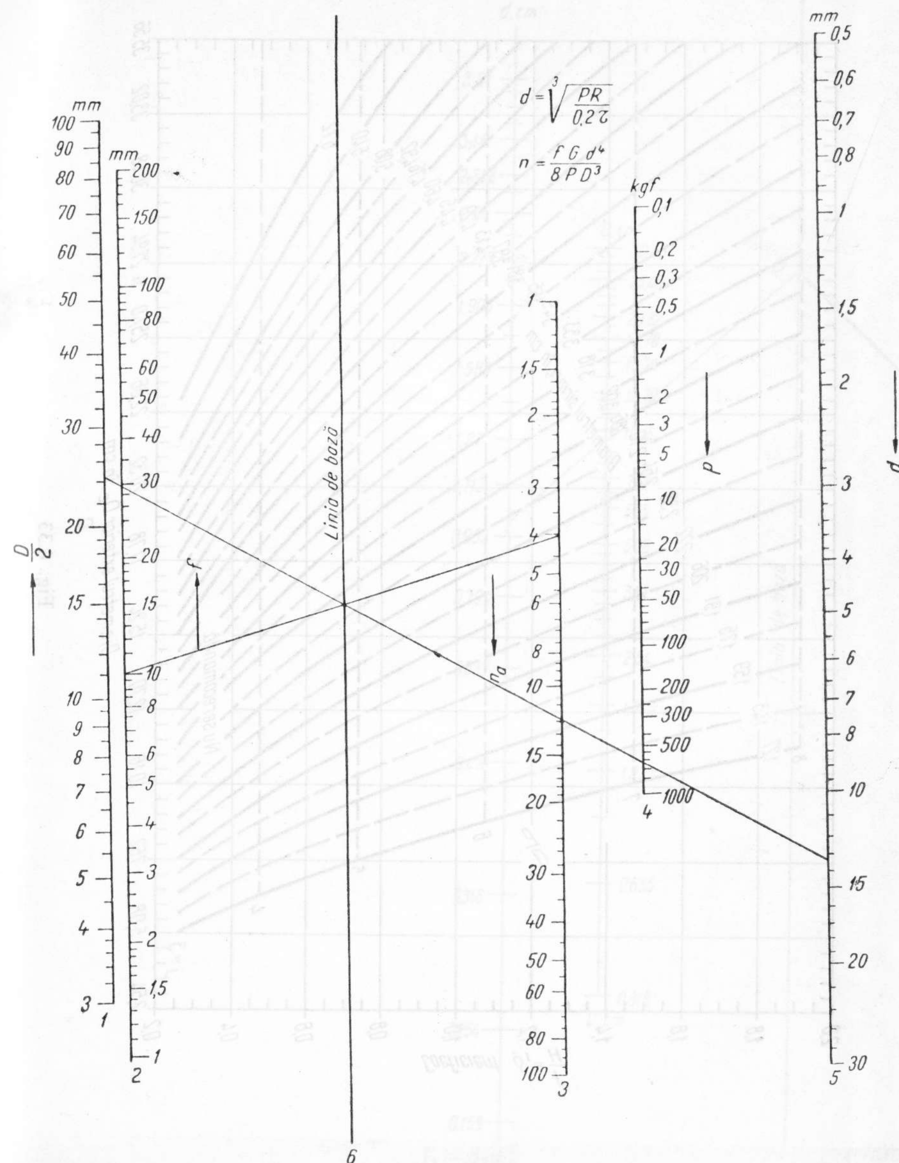



Fig. 6.32

O altă nomogramă utilizată îndeosebi pentru arcuri grele, solicitate la forțe mari de pînă la 10 000 kgf, care au dimensiuni mari și ca atare sînt executate din bare de oțel cu secțiune circulară, de diametre variind de la 12 pînă la 60 mm, iar diametrul spirei arcului mergînd pînă la aproximativ 260 mm, este indicată în fig. 6.33, *a* și *b*.

*Tabela 6.12*

**Coeficienții de corecție la nomograma din fig. 6.32**

| $\tau_a$ | Pentru diametrul $d$ | Pentru numărul de spire active, $n_a$ |
|---|---|---|
| 2 500 | 1,12 | 1,57 |
| 2 750 | 1,08 | 1,38 |
| 3 000 | 1,05 | 1,23 |
| 3 250 | 1,025 | 1,10 |
| 3 500 | 1,00 | 1,00 |
| 3 750 | 0,98 | 0,92 |
| 4 000 | 0,96 | 0,84 |
| 4 150 | 0,94 | 0,77 |
| 4 500 | 0,92 | 0,72 |

Această nomogramă este destinată arcurilor supuse numai la compresiune. Ea se compune din două părți corelate între ele. La baza acestei nomograme stau relațiile de calcul ale următoarelor elemente:

sarcina $P=\frac{\pi\tau d^3}{8D}$; (6.90)

săgeata pe o spiră activă $f_1=\frac{\pi\ \tau D^2}{Gd}$ (6.91)

și săgeata pe o spiră, raportată la diametrul sîrmei:

$$\delta_1=\frac{f_1}{d}=\frac{\pi\tau D^2}{Gd^2}=\frac{f}{H}. \quad (6.92)$$

Acest coeficient este de fapt raportul dintre săgeata arcului $f$ și lungimea arcului activ, complet comprimat, $H$.

Nomograma este calculată pentru un efort unitar $\tau\approx 7\ 000$ kgf/cm², la comprimarea totală a arcului.

Parametrii cu care se lucrează în nomogramă se determină cu următoarele relații auxiliare:

lungimea arcului complet destins

$$H_0=H(1+\delta_1)+1,5\ d; \quad (6.93)$$

lungimea efectivă a arcului complet destins

$$H_0'=H_0-1,5\ d; \quad (6.94)$$

săgeata arcului calculată pentru o spiră activă

$$f_1=\delta_1 d; \quad (6.95)$$

săgeata arcului calculată pentru toate spirele active

$$f=\delta_1 \; H=\delta_1 dn. \qquad (6.96)$$

În prima parte a nomogramei (fig. 6.33, *a*) sînt cuprinse:

— pe abscisă, scara diametrelor exterioare $D_e$ ale spirei;

— pe ordonată, scara coeficientului $\delta_1$;

— prin linii întrerupte paralele cu axa absciselor sînt indicate valorile raportului de formă al arcului, $j=\frac{D}{d}$;

— o familie de curbe corespunzătoare diametrelor *d* ale sîrmei din care se execută arcul.

În partea a doua a diagramei (fig. 6.33, *b*) sînt indicate:

— pe scara absciselor diametrele exterioare $D_e$ ale spirei;

— pe scara ordonatelor, valorile forţelor $P_{max}$ corespunzătoare comprimării totale a arcului;

— o familie de curbe trasate întrerupt, corespunzătoare raportului de formă al arcului, $j=\frac{D}{d}$;

— o familie de curbe trasate cu linie plină, corespunzătoare diametrului barei.

Prin folosirea celor două părţi ale nomogramei se pot determina elementele arcului căutat.

În fig. 6.34 este reprezentată o nomogramă întocmită pentru arcuri executate din oţel cu modulul de elasticitate transversal cunoscut, $G=8{,}1\times10^5$ kgf/cm². Această nomogramă este însoţită de o nomogramă ajutătoare, cu care se găseşte coeficientul de corecţie *K*, necesar determinării efortului unitar maxim, care apare în punctele periculoase.

Această nomogramă este construită pentru arcuri elicoidale cilindrice din sîrmă cu secţiune circulară de oţel cu diametre cuprinse între aproximativ 0,4 şi 120 mm, diametrul spirei cuprins între 3 şi 300 mm, sarcina de încărcare a arcurilor mergînd de la 0,045 pînă la 45 000 kgf. Nomograma cuprinde şase scări pentru: diametru mediu *D* al spirei; diametrul sîrmei, *d*, sarcina *P*; efortul unitar la răsucire, $\tau$; factorul de corecţie *K*; efortul unitar maxim, corectat, ţinînd seama de toate eforturile (forfecare, compresiune, încovoiere), $\tau_k$. Nomograma cuprinde şi o linie de bază fără scară, punctul determinat pe ea servind la trecerea de la scările din dreapta spre cele din stînga, sau invers.

În nomograma ajutătoare se determină coeficientul *K* în funcţie de diametrul *d* al sîrmei şi diametrul *D* al spirei.

Pentru a arăta cum se lucrează cu nomograma, se presupune că se cunosc $D=5$ cm, $d=0{,}6$ cm, $P=50$ kgf şi se cere să se determine efortul unitar $\tau_k$. Unind valorile corespunzătoare lui *D* şi *d* pe nomograma ajutătoare, pe aceeaşi linie se determină *K*. Pe nomograma de bază se uneşte *D* cu *d* şi se determină un punct pe linia de bază. Unind acest punct cu valoarea *P*, se determină o valoare $\tau$. Aceasta se uneşte cu valoarea *K* determinată pe nomograma ajutătoare şi se determină $\tau_k=3\,200$ kgf/cm² faţă de $\tau\approx2\,500$ kgf/cm², cît era efortul unitar necorectat.



În fig. 6.35 este reprezentată o nomogramă întocmită pentru arcuri elicoidale cilindrice din sîrmă cu secţiune circulară, care se pot executa din diferite materiale, al căror modul de elasticitate transversal este indicat în scara *G*. Nomograma este determinată pe baza relaţiilor uzuale de calcul şi cuprinde şapte scări gradate şi două linii de bază care servesc la fixarea punctelor de legătură între scări. Scările folosite sînt:

— *d*, pentru diametrul sîrmei la valori cuprinse între 1,5 şi 40 mm;

— *D*, pentru diametrul mediu al spirei la valori cuprinse între 3 şi 300 mm;

— *n*, pentru numărul de spire active de la 0,5 pînă la 30 de spire;

— *G*, pentru modulul de elasticitate transversal;

— *c*, pentru rigiditatea arcului;

— *P*, pentru sarcina de încărcare a arcului la valori variind de la 0,04 pînă la 45 000 kgf;

— *f*, pentru săgeata arcului la săgeţi de la 0,2 pînă la 250 mm.

Modul de utilizare al nomogramei. Fie un arc cu $G=8{,}5\times10^5$ kgf/cm², o rigiditate $c=300$ kgf/cm, $d=1$ cm şi $D=10$ cm. Se cere numărul spirelor active şi săgeata, dacă este supus la 200 kgf. Se uneşte valoarea *G* cu valoarea *c* şi se determină pe scara $c_2$ punctul *A*. Se uneşte valoarea lui *d* cu valoarea lui *D*, determinînd pe scara $C_1$ punctul *B*. Se uneşte *A* cu *B* şi se determină $n=1$. Se uneşte valoarea *c* cu valoarea lui *P* şi se determină, în prelungirea liniei, valoarea lui $f\approx1{,}8$ cm.

## 6.5. Analiza dimensională a arcurilor elicoidale, cilindrice din sîrmă cu secţiune circulară, din punctul de vedere al toleranţelor dimensionale ale arcurilor

La proiectarea arcurilor pe baza relaţiilor uzuale de calcul se stabilesc dimensiunile nominale pentru diametrul sîrmei, *d*; diametrul spirei, *D*; numărul de spire active, săgeţile corespunzătoare, precum şi valoarea sarcinii de încărcare;

Trebuie avut în vedere însă că în procesul de fabricare al arcurilor apar o serie de situaţii care duc la unele abateri dimensionale, şi astfel la modificări în comportarea acestora.

Dacă se consideră relaţia de calcul pentru determinarea forţei de încărcare a arcului

$$P=\frac{Gfd^4}{8nD^3}, \qquad (6.97)$$

se observă că valoarea sarcinii de încărcare, $P$, a arcului se schimbă o dată cu modificarea oricărui factor care intră în relaţie. Această modificare depinde de exponentul puterii, la care este ridicat factorul respectiv în relaţie, precum şi de semnul abaterii de la valoarea nominală a factorului respectiv.

Se poate observa astfel că o abatere pozitivă a factorilor de la numărător determină o creştere pozitivă a valorii corespunzătoare sarcinii de încărcare $P$. În schimb, factorii de la numitor determină o creştere pozitivă a valorii sarcinii de încărcare $P$ dacă au o abatere negativă.

În relaţia care dă sarcina de încărcare $P$, săgeata $f$ corespunde unei anumite lungimi a arcului, $H_0$ şi o dată cu schimbarea acestei lungimi se schimbă şi săgeata. Din această cauză, în calculul de toleranţe se va avea în vedere abaterea de la lungimea nominală a arcului raportată la săgeată.

Dacă se notează abaterile diametrului sîrmei, diametrului spirei, numărului de spire active şi al lungimii, respectiv cu $\Delta d$, $\Delta D$, $\Delta n$ şi $\Delta H$, creşterea procentuală a mărimii forţei de comprimare a arcului este dată de relaţia exactă:

$$\frac{\Delta P_{(+)}}{P_{max}}=\frac{\left(1+\frac{\Delta H}{f}\right)\left(1+\frac{\Delta d}{d}\right)^4}{\left(1-\frac{\Delta n}{n}\right)\left(1-\frac{\Delta D}{D}\right)^3}-1. \qquad (6.98)$$

Dezvoltînd parantezele după binomul lui Newton şi neglijînd toţi termenii de la puterea a doua în sus, se poate scrie:

$$\left(1+\frac{\Delta d}{d}\right)^4=1+4\frac{\Delta d}{d};$$

$$\left(1-\frac{\Delta D}{D}\right)^3=1-3\frac{\Delta D}{D}. \qquad (6.99)$$



Creşterea procentuală a mărimii forţei ia forma aproximativă:

$$\frac{\Delta P_{(+)}}{P_{max}}=\frac{\left(1+\frac{\Delta H}{f}\right)\left(1+4\frac{\Delta d}{d}\right)}{\left(1-\frac{\Delta n}{n}\right)\left(1-3\frac{\Delta D}{D}\right)}-1. \qquad (6.100)$$

În cazul schimbării semnelor abaterilor se obţine scăderea procentuală a mărimii forţei de comprimare dată de expresiile:

$$\frac{\Delta P_{(-)}}{P_{mxa}}=1-\frac{\left(1-\frac{\Delta H}{f}\right)\left(1-\frac{\Delta d}{d}\right)^4}{\left(1+\frac{\Delta n}{n}\right)\left(1+\frac{\Delta H}{D}\right)^3} \text{ (relaţie exactă)}, \qquad (6.101)$$

sau

$$\frac{\Delta P_{(-)}}{P_{max}}=1-\frac{\left(1-\frac{\Delta H}{f}\right)\left(1-4\frac{\Delta d}{d}\right)}{\left(1+\frac{\Delta n}{n}\right)\left(1+3\frac{\Delta D}{D}\right)} \text{ (relaţie aproximativă)}. \qquad (6.102)$$

Creşterea medie a mărimii forţei este dată de relaţia:

$$\Delta P=\pm P\left(4\frac{\Delta d}{d}+\frac{\Delta H}{f}+\frac{\Delta n}{n}+3\frac{\Delta D}{D}\right). \qquad (6.103)$$

Creşterea probabilă este:

$$\Delta P=\pm P\sqrt{\left(4\frac{\Delta d}{d}\right)^2+\left(\frac{\Delta H}{f}\right)^2+\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2+\left(3\frac{\Delta D}{D}\right)^2}. \qquad (6.104)$$

În mod asemănător, pentru variaţia săgeţii se porneşte de la relaţia de calcul

$$f=\frac{8P_0nD^3}{Gd^4} \qquad (6.105)$$

și se obțin relațiile exacte:

$$\frac{\Delta f_{(+)}}{f_{max}}=\frac{\left(1+\frac{\Delta n}{n}\right)\left(1+\frac{\Delta D}{D}\right)^3}{\left(1-\frac{\Delta d}{d}\right)^4}-1;$$

$$\frac{\Delta f_{(-)}}{f_{max}}=1-\frac{\left(1-\frac{\Delta n}{n}\right)\left(1-\frac{\Delta D}{D}\right)^3}{\left(1+\frac{\Delta d}{d}\right)^4} \qquad (6.106)$$

și relațiile aproximative:

$$\frac{\Delta f_{(+)}}{f_{max}}=\frac{\left(1+\frac{\Delta n}{n}\right)\left(1+3\frac{\Delta D}{D}\right)}{\left(1-4\frac{\Delta d}{d}\right)};$$

$$\frac{\Delta f_{(-)}}{f_{max}}=\frac{\left(1\ \frac{\Delta n}{n}\right)\left(1-3\frac{\Delta D}{D}\right)}{\left(1+4\frac{\Delta d}{d}\right)}. \qquad (6.107)$$

Creșterea medie a mărimii săgeții

$$\Delta f=\pm f\left[4\frac{\Delta d}{d}+3\frac{\Delta D}{D}+\frac{\Delta n}{n}\right]. \qquad (6.108)$$

Creșterea probabilă a săgeții

$$f=\pm f\sqrt{\left(4\frac{\Delta d}{d}\right)^2+\left(3\frac{\Delta D}{D}\right)^3+\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2} \qquad (6.109)$$

În aplicațiile practice interesează, de asemenea, variația rigidității arcului, dată de relația:

$$c=\frac{P}{f}=\frac{Gd^4}{8n\,D^3}. \qquad (6.110)$$



Dezvoltînd calculele în același fel, se obțin relațiile:

$$\frac{\Delta c_{(+)}}{c}=\frac{\left(1+\frac{\Delta d}{d}\right)^4}{\left(1-\frac{\Delta n}{n}\right)\left(1-\frac{\Delta D}{D}\right)^3}\approx\frac{1+4\frac{\Delta d}{d}}{\left(1-\frac{\Delta n}{n}\right)\left(1-3\frac{\Delta D}{D}\right)}; \qquad (6.111)$$

$$\frac{\Delta c_{(-)}}{c}=\frac{\left(1-\frac{\Delta d}{d}\right)^4}{\left(1+\frac{\Delta n}{n}\right)\left(1+\frac{\Delta D}{D}\right)^3}\approx\frac{\left(1-4\frac{\Delta d}{d}\right)}{\left(1+\frac{\Delta n}{n}\right)\left(1+3\frac{\Delta D}{D}\right)}$$

Creșterea medie a rigidității

$$\Delta c=\pm c\left[4\frac{\Delta d}{d}+3\frac{\Delta D}{D}+\frac{\Delta n}{n}\right]. \qquad (6.112)$$

Creșterea probabilă a rigidității

$$\Delta c=\pm c\sqrt{\left(4\frac{\Delta d}{d}\right)^2+\left(3\frac{\Delta D}{D}\right)^2+\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2}. \qquad (6.113)$$

În mod asemănător se poate observa influența abaterilor dimensionale asupra eforturilor unitare tangențiale care se nasc în secțiunea spirei. Pornind de la relația:

$$\tau=\frac{8\,P\,D}{\pi d^3}, \qquad (6.114)$$

se pot scrie relațiile:

$$\frac{\Delta\tau_{(+)}}{\tau}=\frac{\left(1+\frac{\Delta P}{P}\right)\left(1+\frac{\Delta D}{D}\right)}{\left(1-\frac{\Delta d}{d}\right)^3}\approx\frac{\left(1+\frac{\Delta P}{P}\right)\left(1+\frac{\Delta D}{D}\right)}{1-3\frac{\Delta d}{d}}; \qquad (6.115)$$

$$\frac{\Delta\tau_{(-)}}{\tau}=\frac{\left(1-\frac{\Delta P}{P}\right)\left(1-\frac{\Delta P}{P}\right)}{\left(1+\frac{\Delta d}{d}\right)^3}\approx\frac{\left(1-\frac{\Delta P}{P}\right)\left(1-\frac{\Delta P}{P}\right)}{1+3\frac{\Delta d}{d}}.$$

Creşterea medie a efortului unitar în secţiunea transversală

$$\Delta\tau = \pm\tau\left[\frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta D}{D} + 3\frac{\Delta d}{d}\right]. \qquad (6.116)$$

Creşterea probabilă

$$\Delta\tau = \pm\tau\sqrt{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 + \left(3\frac{\Delta d}{d}\right)^2}. \qquad (6.117)$$

## 6.6. Încovoierea arcurilor elicoidale cilindrice

În cazul aplicării excentrice a sarcinii axiale, cînd datorită condiţiilor de prindere a capetelor arcului, acesta este solicitat de un moment care se găseşte în planul axei arcului sau cînd acesta este solicitat de forţe perpendiculare pe axa sa, se poate produce o încovoiere, adică o curbare a axei sale. De regulă, în construcţia de maşini se evită solicitarea arcurilor elicoidale la încovoiere, dar încovoierea poate apărea totuşi datorită unor condiţii de montare a arcurilor, care fac ca sarcina axială să fie aplicată excentric, făcînd ca asupra arcului să acţioneze forţe perpendiculare pe axa lui sau să apară momente care să acţioneze în plane care trec prin axa acestora.

În astfel de situaţii interesează să se dea răspuns la două probleme şi anume:

determinarea eforturilor unitare periculoase care se produc în spirele arcului;

determinarea deplasărilor arcului.

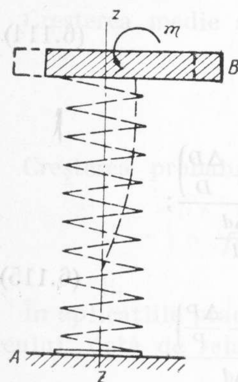



Fig. 6.36

### 6.6.1. Determinarea eforturilor unitare în cazul încovoierii arcului

În fig. 6.36 este reprezentat schematic un arc elicoidal solicitat la încovoiere de un moment $\mathfrak{M}$, aplicat la extremitatea arcului. Axa *zz* se curbează, iar ca urmare spirele arcului se răsucesc şi se încovoaie.

În fig. 6.37, momentul este reprezentat prin vectorul $\mathfrak{M}$, care se descompune, după direcţia razei secţiunii şi după direcţia tangentei comune la cilindrul generator al arcului şi la conturul secţiunii sîrmei, în componentele $\mathfrak{M}_t$ şi $\mathfrak{M}_n$.



Notînd cu $\psi$ unghiul dintre planul secţiunii transversale a spirei şi planul *xoz*, mărimile componentelor momentului au expresiile:

$$\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}\sin\psi \text{ şi } \mathfrak{M}_t = \mathfrak{M}\cos\psi. \qquad (6.118)$$

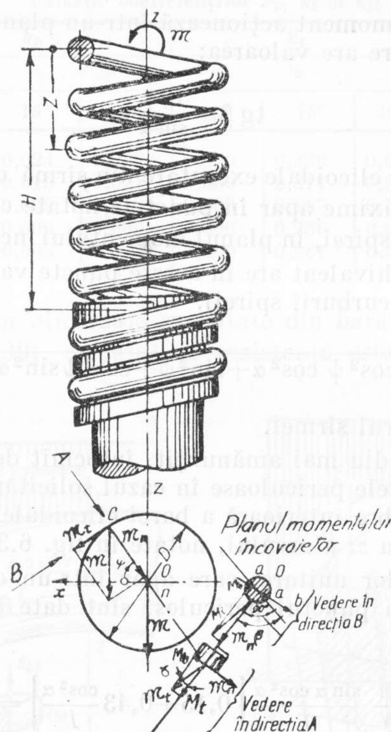



Fig. 6.37

Momentul $\mathfrak{M}_t$ se descompune la rîndul său în două componente: una perpendiculară pe planul secţiunii transversale a spirei care solicită materialul la răsucire $M_t$ şi alta cuprinsă în planul secţiunii transversale a spirei $M_b$, care solicită materialul la înconvoiere. Acest moment produce rotirea secţiunii transversale în jurul binormalei.

Dacă unghiul de pantă al spirelor este $\alpha$,

$$M_t = \mathfrak{M}\cos\psi\cos\alpha; \qquad (6.119)$$
$$M_b = -\mathfrak{M}\cos\psi\sin\alpha.$$

Valoarea momentului înconvoietor total într-o secţiune a spirei, care face unghiul $\psi$ cu axa $ox$, este:

$$M_i=\sqrt{\mathfrak{M}_n^2+M_b^2}=\mathfrak{M}\sqrt{\sin^2\psi+\cos^2\psi\sin^2\alpha}. \tag{6.120}$$

Vectorul acestui moment acţionează într-un plan înclinat faţă de axa $n$ cu un unghi $\beta$, care are valoarea:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg}\psi}{\sin\alpha}. \tag{6.121}$$

În cazul arcurilor elicoidale executate din sîrmă cu secţiune rotundă, eforturile unitare maxime apar în punctele notate cu $a$ pe conturul secţiunii transversale a spirei, în planul momentului înconvoietor (fig. 6.37).

Efortul unitar echivalent are în aceste puncte valoarea aproximativă (neglijînd influenţa curburii spirei):

$$\sigma_e=\frac{\mathfrak{M}}{W_i}\sqrt{\cos^2\psi\cos^2\alpha+\sin^2\psi+\cos^2\psi\sin^2\alpha}=\frac{\mathfrak{M}}{0{,}1\,d^3} \tag{6.122}$$

unde: $d$ este diametrul sîrmei.

Pe baza unui studiu mai amănunţit, întocmit de N.A. Cernîşev, s-a demonstrat că punctele periculoase în cazul solicitării la încovoiere sînt punctele aflate pe fibra interioară a barei elicoidale, adică punctele cele mai apropiate de axa $zz$ a arcului, notate în fig. 6.38 cu litera $I$.

Valorile eforturilor unitare, care apar într-un element al spirei de secţiune circulară în punctul periculos, sînt date de relaţiile stabilite de N. A. Cernîşev:

$$\sigma_{bb}=\frac{\mathfrak{M}}{W}\,\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{j}\left[0{,}15+0{,}43\frac{\cos^2\alpha}{j}\right]=\frac{\mathfrak{M}}{W}k_b$$

$$\sigma_{tt}=\frac{\mathfrak{M}}{W}\sin\alpha\left[1+0{,}87\frac{\cos^2\alpha}{j}+0{,}38\frac{\cos^4\alpha}{j^2}\right]=\frac{\mathfrak{M}}{W}k_t \tag{6.123}$$

$$\tau_{tt}=\tau_{bt}=\frac{\mathfrak{M}}{W_p}\left[1+0{,}63\frac{\cos^2\alpha}{j}+(0{,}18+0{,}17\cos^2\alpha\frac{\cos^2\alpha}{j^2}\right]\cos\alpha=$$

$$=\frac{\mathfrak{M}}{W_p}k_{tb},$$

$$\text{unde: } j=\frac{D}{d};\quad W=\frac{\pi d^3}{32}\ \text{şi}\ W_p=\frac{\pi d^3}{16}. \tag{6.124}$$



Coeficienţii $k_b$, $k_t$ şi $k_{tb}$ care rezultă din aceste relaţii, se găsesc calculaţi în funcţie de mărimile $\alpha$ şi $j$ în tabela 6.13.

*Tabela 6.13*

**Valorile coeficienţilor $k_b$, $k_t$ şi $k_{tb}$**

| $j=\frac{D}{d}$ | $k_b$ | | | $k_t$ | | | $k_{tb}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\alpha$ | | | $\alpha$ | | | $\alpha$ | | |
| | 0° | 15° | 30° | 0° | 15° | 30° | 0° | 15° | 30° |
| 3 | 0,000 | 0,024 | 0,032 | 0,000 | 0,339 | 0,621 | 1,250 | 1,210 | 1,030 |
| 4 | 0,000 | 0,015 | 0,021 | 0,000 | 0,317 | 0,588 | 1,180 | 1,130 | 0,982 |
| 6 | 0,000 | 0,009 | 0,012 | 0,000 | 0,297 | 0,557 | 1,115 | 1,070 | 0,940 |
| 8 | 0,000 | 0,006 | 0,009 | 0,000 | 0,286 | 0,537 | 1,085 | 1,050 | 0,920 |
| 10 | 0,000 | 0,005 | 0,007 | 0,000 | 0,281 | 0,533 | 1,067 | 1,027 | 0,910 |

În cazul arcurilor elicoidale executate din bare cu secţiune dreptunghiulară (v. fig. 6.39), calculul de rezistenţă este mai complex şi de

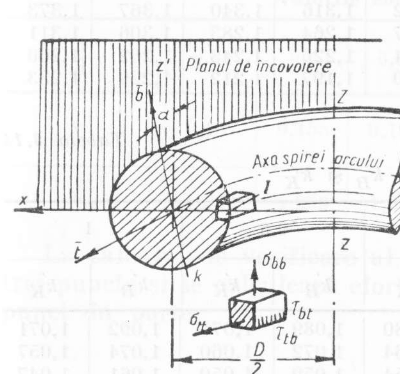



Fig. 6.38

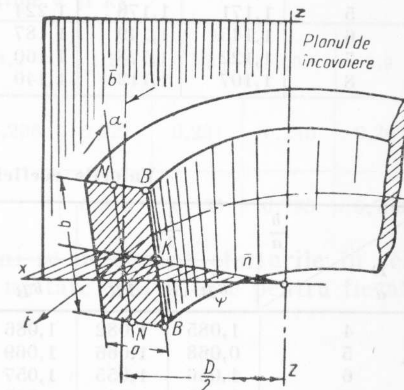



Fig. 6.39

regulă se aplică numai un calcul de verificare. Punctele în care apar eforturile unitare periculoase sînt notate în fig. 6.39 cu $B$ (colţurile interioare), cu $K$ (mijlocul laturilor $b$ paralele cu axa $zz$) şi $N$ (mijlocul laturilor $a$).

Relaţiile eforturilor unitare în aceste puncte au fost stabilite de S. P. Demidov şi sînt valabile în cazul spirei cu unghiul de pantă mic.

Pentru punctele $B$ (există o stare de eforturi monoaxială):

$$\sigma = k_B \frac{\mathfrak{M} \sin \psi}{ab^2} + k'_B \frac{\mathfrak{M} \cos \psi \sin \alpha}{a^2 b}. \tag{6.125}$$

Pentru punctele $K$ (există o stare de eforturi biaxială):

$$\sigma = k'_K \frac{\mathfrak{M} \cos \psi \sin \alpha}{\frac{a^2 b}{6}} \text{ şi } \tau = k_K \frac{\mathfrak{M} \cos \psi \cos \alpha}{\nu a^2 b}. \tag{6.126}$$

*Tabela 6.14*

**Valorile coeficientului $k_B$**

| $\frac{D}{a}$ \ $\frac{b}{a}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 0,8 | 1,0 | 1,25 | 1,5 | 2,0 | 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1,214 | 1,223 | 1,280 | 1,340 | 1,395 | 1,425 | 1,454 | 1,466 |
| 5 | 1,171 | 1,178 | 1,224 | 1,272 | 1,316 | 1,340 | 1,367 | 1,373 |
| 6 | 1,143 | 1,149 | 1,187 | 1,227 | 1,264 | 1,283 | 1,306 | 1,311 |
| 7 | 1,122 | 1,128 | 1,160 | 1,194 | 1,226 | 1,243 | 1,262 | 1,266 |
| 8 | 1,107 | 1,112 | 1,140 | 1,170 | 1,197 | 1,212 | 1,229 | 1,233 |

*Tabela 6.15*

**Valorile coeficienţilor $k'_B$ şi $k'_K$**

| $j=\frac{D}{a}$ \ $\frac{b}{a}$ | $\frac{1}{3}$ | | $\frac{1}{2}$ | | 0,8 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k'_B$ | $k'_K$ | $k'_B$ | $k'_K$ | $k'_B$ | $k'_K$ | $k'_B$ | $k'_K$ |
| 4 | 1,085 | 1,082 | 1,086 | 0,080 | 1,089 | 1,075 | 1,092 | 1,071 |
| 5 | 0,068 | 1,066 | 1,069 | 1,064 | 1,072 | 1,060 | 1,074 | 1,057 |
| 6 | 1,056 | 1,055 | 1,057 | 1,054 | 1,059 | 1,050 | 1,061 | 1,047 |
| 8 | 1,043 | 1,041 | 1,043 | 1,040 | 1,044 | 1,038 | 1,046 | 1,035 |

| $j=\frac{D}{a}$ \ $\frac{b}{a}$ | 1,25 | | 1,5 | | 2,0 | | 3,0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k'_B$ | $k'_K$ | $k'_B$ | $k'_K$ | $k'_B$ | $k'_K$ | $k'_B$ | $k'_K$ |
| 4 | 1,096 | 1,064 | 1,103 | 1,055 | 1,114 | 1,033 | 1,145 | 0,971 |
| 5 | 1,077 | 1,051 | 1,083 | 1,044 | 1,090 | 1,027 | 1,115 | 0,977 |
| 6 | 1,064 | 1,043 | 1,067 | 1,037 | 1,075 | 1,022 | 1,096 | 0,981 |
| 8 | 1,048 | 1,032 | 1,051 | 1,028 | 1,056 | 1,017 | 1,072 | 0,986 |



Pentru punctele $N$ (există o stare de eforturi biaxială):

$$\sigma = \frac{\mathfrak{M} \sin \psi}{\frac{ab^2}{6}} \text{ şi } \tau = k_N \frac{M_t}{\nu a^2 b}. \tag{6.127}$$

Valorile coeficienţilor $k_B$, $k'_B$, $k'_K$, $k_K$, $k_N$ şi $\nu$ sînt date în tabelele 6.14, 6.15, 6.16 şi 6.17.

*Tabela 6.16*

**Valorile coeficientului $k_K$**

| $\frac{D}{a}$ \ $\frac{b}{a}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 0,8 | 1,0 | 1,25 | 1,5 | 2,0 | 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1,275 | 1,232 | 1,162 | 1,135 | 1,114 | 1,098 | 1,079 | 1,048 |
| 5 | 1,220 | 1,186 | 1,129 | 1,109 | 1,091 | 1,079 | 1,063 | 1,039 |
| 6 | 1,183 | 1,155 | 1,108 | 1,090 | 1,076 | 1,066 | 1,053 | 1,032 |
| 7 | 1,157 | 1,133 | 1,098 | 1,077 | 1,065 | 1,056 | 1,045 | 1,028 |
| 8 | 1 137 | 1,116 | 1,081 | 1,068 | 1,057 | 1,049 | 1,040 | 1,024 |

*Tabela 6.17*

**Valorile coeficienţilor $\nu$ şi $k_N$**

| $\frac{b}{a}$ | 0,33 | 0,5 | 0,8 | 1,0 | 1,25 | 1,5 | 2,0 | 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\nu$ | 0,107 | 0,155 | 0,193 | 0,208 | 0,221 | 0,231 | 0,246 | 0,267 |
| $k_N$ | 1,322 | 1,258 | 1,092 | 1 | 0,916 | 0,859 | 0,795 | 0,753 |

La calculul de verificare al arcului se determină eforturile în cele trei puncte şi se calculează eforturile unitare echivalente pentru fiecare punct în parte.

### 6.6.2. Determinarea deplasărilor

Deplasările, în cazul deplasărilor relativ mici, se determină cu ajutorul integralei lui Mohr. Astfel: pentru unghiul de rotire $\Delta\varphi$ al capătului de sus al arcului în raport cu cel de jos presupus încastrat (v. fig. 6.36), rezultă relaţia:

$$\Delta\varphi = \int_0^l \frac{\mathfrak{M}_n \mathfrak{M}_{n1} ds}{EI_n} + \int_0^l \frac{M_b M_{b1} ds}{EI_b} + \int_0^l \frac{M_t M_{t1} ds}{GI_0}, \tag{6.128}$$

în care: $\mathfrak{M}_n$, $M_b$ și $M_t$ — sînt momentele care acționează în secțiunea transversală a spirei;

$\mathfrak{M}_{n1}$, $M_{b1}$ și $M_{t1}$ — momentele care rezultă în secțiune datorită aplicării momentului $\mathfrak{M}=1$.

Acestea se determină cu relațiile:

$$\mathfrak{M}_{n1}=l\sin\psi;\ M_{b1}=l\cos\psi\sin\alpha;\ M_{t1}=l\cos\psi\cos\alpha, \tag{6.129}$$

în care $l$ este lungimea sîrmei din care este executat arcul;

$$l=\frac{\pi Dn}{\cos\alpha}, \tag{6.130}$$

unde: $n$ este numărul de spire;

$ds$ — lungimea unui element din axa spirei;

$$ds=\frac{Dd\psi}{2\cos\alpha}, \tag{6.131}$$

unde: $I_n$, $I_b$ și $I_0$ sînt momentele de inerție axiale față de axele, $n$, $b$ și polar față de centrul secțiunii transversale a sîrmei.

Efectuînd calculele se obține:

$$\Delta\varphi=\int_0^{2\pi n}\frac{\mathfrak{M}D\sin^2\psi\,d\psi}{2EI_r\cos\alpha}+\int_0^{2\pi n}\frac{\mathfrak{M}D\cos^2\psi\sin^2\alpha d}{2EI_b\cos\alpha}+$$

$$+\int_0^{2\pi n}\frac{\mathfrak{M}D\cos^2\psi\cos^2\alpha\,d\psi}{2GI_0\cos\alpha}=\frac{\mathfrak{M}l}{2EI_n}\left[\left(\frac{I_b}{I_n}\sin^2\alpha+\frac{EI_n}{GI_0}\cos^2\alpha+1\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{I_n}{I_b}\sin^2\alpha+\frac{EI_n}{GI_0}\cos^2\alpha-1\right)\frac{\sin 4\pi n}{4\pi n}\right]. \tag{6.132}$$

Observînd că termenul al doilea este neglijabil, relația unghiului de rotire devine:

$$\Delta\varphi=\frac{\mathfrak{M}l}{2EI_n}\left[1+\frac{I_n}{I_b}\sin^2\alpha+\frac{EI_n}{GI_0}\cos^2\alpha\right]=$$

$$=\frac{\mathfrak{M}}{EI_n}\,\frac{\left(1+\frac{I_n}{I_b}\sin^2\alpha+\frac{EI_n}{GI_0}\cos^2\alpha\right)\pi Dn}{2\cos\alpha}\approx\frac{\mathfrak{M}}{EI_n}\,\frac{\pi Dn}{2}\left(1+\frac{EI_n}{GI_0}\right). \tag{6.133}$$

În cazul arcurilor executate din sîrmă cu secțiune circulară

$$\Delta\varphi=\frac{\mathfrak{M}}{EI}\,\frac{(2+\mu\cos^2\alpha)\pi Dn}{2\cos\alpha}\approx\frac{\mathfrak{M}\pi Dn}{2EI}(2+\mu). \tag{6.134}$$



Relațiile aproximative indicate sînt valabile în cazul arcurilor a căror pantă de înclinare a spirelor este mică: $\alpha\approx 0$.

Relația pentru calculul deformației $\Delta\varphi$ (unghiul de rotire al capătului) poate fi comparată cu relația pentru determinarea unghiului de rotire al unei bare echivalente încastrată la un capăt, de lungime egală cu înălțimea arcului, solicitată la încovoiere pură de un același moment.

Această relație este următoarea:

$$\Delta\varphi=\frac{\mathfrak{M}H}{B}, \tag{6.135}$$

în care $B$ este rigiditatea barei echivalente la încovoiere;

$$B=\frac{2EI_n\,H\cos\alpha}{\pi Dn\left(1+\frac{I_n}{I_b}\sin^2\alpha+\frac{EI_n}{GI_0}\cos^2\alpha\right)}, \tag{6.136}$$

unde $H$ este înălțimea arcului sau, în cazul particular al arcului din sîrmă rotundă

$$B=\frac{2EIH\cos\alpha}{\pi Dn(2+\mu\cos\alpha)}. \tag{6.137}$$

Pentru determinarea săgeții în direcția axei $x$ se procedează asemănător.

Efectuînd calculele se obține:

$$f_x=\frac{\mathfrak{M}l^2\sin\alpha}{4EI_n}\left(1+\frac{I_n}{I_b}\sin^2\alpha+\frac{EI_b}{GI_0}\cos^2\alpha\right)=$$

$$=\frac{\mathfrak{M}H}{2EI_n}\,\frac{\left(1+\frac{I_n}{I_b}\sin^2\alpha+\frac{EI_n}{GI_0}\cos^2\alpha\right)\pi Dn}{2\cos\alpha}, \tag{6.138}$$

sau folosind bara echivalentă:

$$f_x=\frac{\mathfrak{M}H^2}{2B}. \tag{6.139}$$

### 6.6.3. Încovoierea arcurilor elicoidale sub acțiunea unor sarcini transversale

(Cazul unghiului de pantă mic $\alpha\approx 0$)

În cazul unui arc elicoidal încastrat la un capăt și încărcat la celălalt cu o forță transversală $P$ paralelă cu axa $x$ (fig. 6.40) o spiră aflată la distanța $z$ de capătul arcului este solicitată de un moment încovoietor $M$ și de o forță tăietoare $T$ care au mărimile:

$$M=Pz \text{ și } T=P. \tag{6.140}$$

Într-o secţiune transversală a spirei a cărei poziţie este determinată de unghiul $\psi$, care se formează între planul secţiunei spirei şi planul care conţine axa $x$ şi axa $z$, momentele au valorile (v. fig. 6.40):

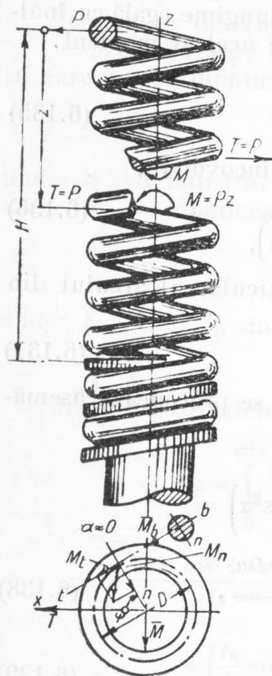



Fig. 6.40

$$M_n = M \sin \psi,$$

$$M_b = \frac{-TD}{2} \sin \psi, \qquad (6.141)$$

$$M_t = M \cos \psi.$$

În secţiunea transversală a sîrmei, în planul căreia se află şi forţa $P$, pentru care $\psi = 0$, apar eforturile unitare tangenţiale:

$$\tau_{tb} = k_{tb} \frac{M_t}{W_p} = k_{tb} \frac{PH}{0{,}2d^3}, \qquad (6.142)$$

iar eforturile unitare normale sînt nule. Coeficientul $k_{tb}$ se alege în funcţie de raportul $j = \frac{D}{d}$ şi de unghiul $\alpha$ din tabela 6.13. În secţiunile în care $\psi = \frac{\pi}{2}$ va rezulta $\tau = 0$ şi

$$\sigma = \frac{M_1}{W} = \frac{\sqrt{M_b^2 + M_n^2}}{W} = \frac{P\sqrt{D^2 + 4H^2}}{0{,}2d^3}. \qquad (6.143)$$

Săgeata arcului (în direcţia axei $x$) se poate determina pe baza barei echivalente cu ajutorul integralei lui Mohr. Efectuînd calculele se obţine:

$$f_x = \frac{MM_1H}{nB} + \frac{TT_1H}{nS},$$

unde:

$$M_1 = lz, \quad T_1 = l, \qquad (6.144)$$

$$B = \frac{2EI_nH}{\pi Dn \frac{EI_n}{GI_0}} \quad \text{şi} \quad S = \frac{8HEI_n}{\pi D^3 n};$$

$B$ şi $S$ fiind rigiditatea la încovoiere şi la alunecare a barei echivalente drepte încastrată la un capăt, de aceeaşi lungime $H$ cu arcul şi încărcată cu aceeaşi sarcină.

Pentru arcurile executate din sîrmă cu secţiune circulară rigidităţile

$$B = \frac{2EIH}{\pi Dn(2+\mu)} \quad \text{şi} \quad S = \frac{8EIH}{D^3 n} \qquad (6.145)$$



## 6.7. Calculul arcurilor elicoidale de compresiune multiple (concentrice)

Uneori arcul elicoidal cilindric de compresiune sau de întindere necesită un gabarit mai mare decît permit posibilităţile constructive de montaj. Pentru a realiza un gabarit mai mic, care să satisfacă cerinţele, se utilizează arcuri compuse din mai multe arcuri concentrice, care preiau concomitent sarcina totală şi care au aceeaşi caracteristică funcţională (forţă-săgeată) ca şi arcul simplu echivalent (fig. 6.41).

Practic, numărul de arcuri, care se montează concentric este în majoritatea cazurilor de două, iar în cazuri speciale se pot găsi soluţii constructive pentru trei sau pentru patru.

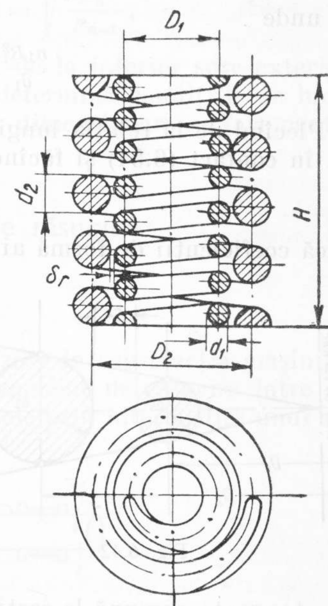



Fig. 6.41

Pentru a evita răsucirea suprafeţelor de reazem frontale şi dezaxarea ansamblului, arcurile concentrice se dispun cu înfăşurarea alternativă unul cu pantă pe dreapta, altul cu pantă pe stînga.

De asemenea, între arcuri trebuie să existe un joc radial satisfăcător, pentru a nu se produce frecarea între spire în timpul încărcării arcului. O condiţie constructivă, care trebuie respectată, este de a executa reazemele frontale astfel ca centrarea arcurilor să fie asigurată.

Pentru calculul de dimensionare al arcurilor multiple se ţine seama de faptul că ele trebuie să îndeplinească următoarele condiţii:

— sarcina totală să fie egală cu suma sarcinilor preluate de arcurile componente, adică

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n; \qquad (6.146)$$

— în vederea utilizării cît mai raţionale a materialului din care se execută arcurile, eforturile unitare care se produc în secţiunile fiecărui arc să aibă aceeaşi valoare, adică

$$\tau = \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_n; \qquad (6.147)$$

— pentru buna funcționare a sistemului de arcuri, săgeata trebuie să fie aceeași la toate arcurile

$$f=f_1=f_2=f_3=\ldots=f_n; \qquad (6.148)$$

— lungimea arcurilor în stare complet comprimate trebuie să fie aceeași, adică

$$n_1 d_1=n_2 d_2=\ldots=n_n d_n. \qquad (6.149)$$

Folosind relația săgeții se poate scrie:

$$f=\frac{4\pi n_1 R_1^2 \tau_1}{G d_1}=\frac{4\pi n_2 R_2^2 \tau_2}{G d_2}=\ldots=\frac{4\pi n_n R_n^2 \tau_n}{G d_n}, \qquad (6.150)$$

de unde

$$\frac{n_1 R_1^2}{d_1}=\frac{n_2 R_2^2}{d_2}=\frac{n_n R_n^2}{d_n}. \qquad (6.151)$$

Plecînd de la relația lungimii porțiunii active a arcului cînd spirele vin în contact (6.54) și făcînd calculele se obține:

$$j_1+j_2=\ldots j_n \qquad (6.152)$$

adică coeficienții de formă ai arcurilor sînt egali.

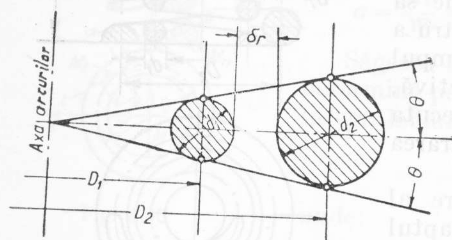


Fig. 6.42

Rezultă

$$\frac{1}{j}=\sqrt{\frac{\pi H \tau_a}{k f G}}=\frac{d_1}{D_1}=\frac{d_2}{D_2}=$$

$$=\ldots=\frac{d_n}{D_n}=\operatorname{tg}\theta. \qquad (6.153)$$

Din această relație rezultă că poziția reciprocă optimă, din punct de vedere teoretic, a arcurilor compuse este obținută în cazul în care tangenta comună la secțiunile circulare transversale trece prin axa longitudinală a arcului, prin același punct cu dreapta care unește diametrul orizontal comun (fig. 6.42).

Se obține de asemenea relația:

$$n_1 R_1=n_2 R_2=n_3 R_3=\ldots=n_n R_n \qquad (6.154)$$

sau

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{R_2}{R_1};\ \frac{n_2}{n_3}=\frac{R_3}{R_2};\ \ldots\frac{n_{n-1}}{n_n}=\frac{R_n}{R_{n-1}}. \qquad (6.155)$$



Expresia sarcinii totale se poate scrie sub forma:

$$P=\frac{0{,}4\tau_a}{k}\left[\frac{d_1^3}{D_1}+\frac{d_2^3}{D_2}+\ldots+\frac{d_n^3}{D_n}\right]. \qquad (6.156)$$

Pentru un joc radial $\delta_r=\frac{d_2-d_1}{2}$, care corespunde condiției ca rapoartele de formă ale arcurilor $j_n=\frac{D_n}{d_n}$ să fie identice cu cele determinate anterior, rezultă:

$$\frac{d_2}{d_1}=\frac{D_2}{D_1}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{j}{j-2}=\sqrt{\frac{P_2}{P_1}}$$

$$\frac{d_n}{d_{n-1}}=\frac{D_n}{D_{n-1}}=\frac{n_n}{n_{n-1}}=\frac{j}{j-2}=\sqrt{\frac{P_n}{P_{n-1}}}, \qquad (6.157)$$

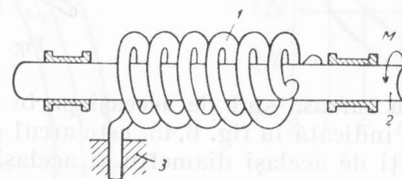
indicii de numerotare ai arcurilor mergînd de la interior spre exterior.

Pe baza relațiilor stabilite anterior se determină condițiile de lucru pentru fiecare arc în parte și calculul de dimensionare se face pentru fiecare arc separat.

## 6.8. Arcuri elicoidale cilindrice de răsucire

### 6.8.1. Generalități

Arcurile elicoidale de răsucire sînt utilizate în construcția mașinilor și a aparatelor pentru transmiterea unui moment de răsucire între un arbore și o carcasă, care sînt cuplate între ele prin intermediul unui arc


Fig. 6.43

elicoidal, a cărei axă coincide cu axa de simetrie și de rotație a elementelor cuplate. Un sistem prevăzut cu arc elicoidal de răsucire se compune din trei părți (fig. 6.43); arcul propriu-zis, *1*; arborele de care se fixează un capăt al arcului *2*; carcasa *3*, la care se fixează celălalt capăt al arcului.

Arcul transmite un moment de răsucire care solicită arborele sau fusul de care este legat la răsucire, în schimb materialul din care este executat arcul este solicitat în primul rînd la încovoiere, solicitarea la răsucire fiind în general neglijabilă.

Deosebirea esențială dintre arcurile elicoidale cilindrice de răsucire și arcurile elicoidale cilindrice de compresiune și tracțiune constă în solicitarea lor. Dacă la arcurile de răsucire materialul este solicitat în primul rînd la încovoiere, solicitarea la răsucire fiind neglijabilă, la arcurile de întindere și compresiune situația este inversă, solicitarea importantă este cea de răsucire, iar cea datorită încovoierii este în general neglijabilă.

Arcurile elicoidale cilindrice de răsucire utilizate se deosebesc ca formă în primul rînd după felul secțiunii barei din care sînt executate, care poate fi: circulară, dreptunghiulară, pătrată, trapezoidală, triunghiulară, eliptică etc.

Arcul elicoidal cilindric de răsucire poate căpăta diferite variante constructive, după modul în care se efectuează răsucirea. Astfel, una din variantele de înfășurare o prezintă arcul elicoidal cilindric de răsucire cu înfășurare interioară, și exterioară, indicat în fig. 6.44, care se caracterizează prin faptul că, atît capătul de legătură cu arborele, cît și

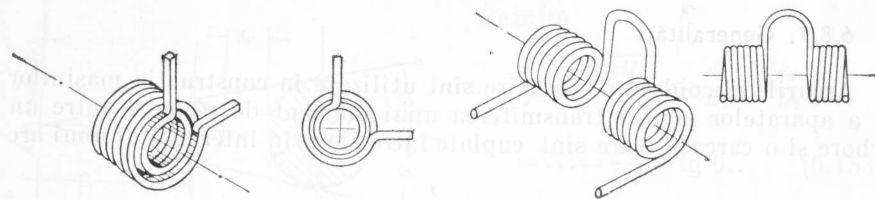


Fig. 6.44

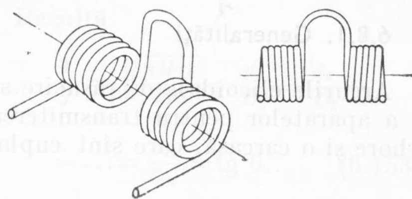


Fig. 6.45

capătul de legătură cu carcasa sînt de aceeași parte a arcului. O altă variantă des întîlnită, indicată în fig. 6.45, este arcul de răsucire dublu, format din două bucăți de același diametru și același număr de spire.

### 6.8.2. Calculul arcurilor elicoidale, cilindrice de răsucire

O porțiune de spiră a arcului elicoidal cilindric de răsucire este de fapt o porțiune a unei bare curbe solicitată la încovoiere, astfel că determinarea eforturilor și dimensionarea arcului se bazează în primul rînd



pe teoria barelor curbe solicitate la încovoiere. Dacă momentul de răsucire transmis de arc este $M$ și unghiul de înclinare al spirei arcului este $\alpha$, într-o secțiune transversală a barei din care este executat arcul apar două solicitări și anume: la încovoiere, sub acțiunea unui moment încovoietor $M_i = M \cos \alpha$ și la răsucire, sub acțiunea unui moment de răsucire $M_t = M \sin \alpha$.

Datorită faptului că unghiul $\alpha$ de înclinare a spirei este mic, solicitarea la răsucire a secțiunii transversale este cu totul neglijabilă. Din această cauză pentru calculul curent se ia în considerare numai solicitarea la încovoiere.

Expresia momentului de încovoiere este variabilă, mărimea sa depinzînd de unghiul cu care este rotită spira în timpul transmiterii momentului. Pentru determinarea efortului unitar maxim care apare în secțiunea barei se ia în considerare valoarea momentului de răsucire în momentul cînd arcul este strîns. Valoarea efortului unitar maxim depinde și de forma secțiunii transversale a barei din care este executată spira, și de coeficientul de formă al arcului $j = \frac{D}{d}$.

Relațiile de calcul pentru arcul elicoidal de răsucire (fig. 6.46) sînt dependente de elementele geometrice ale arcului și de caracteristicile mecanice ale materialului din care este executat.

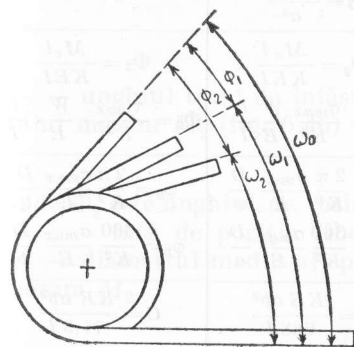



Fig. 6.46

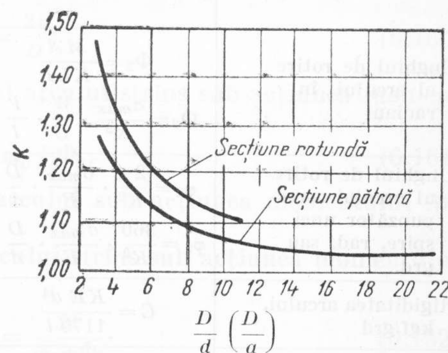



Fig. 6.47

În tabela 6.18 sînt date relațiile de calcul mai importante pentru calculul arcurilor elicoidale de răsucire în funcție de elementele geometrice și caracteristicile mecanice ale acestora.

Valorile coeficientului $K$ rezultă din relațiile indicate în tabelă. Pentru un calcul mai expeditiv se folosește diagrama din fig. 6.47,

*Tabela 6.18*

**Relațiile de calcul al arcurilor elicoidale**

| Felul secțiunii | Circulară | Dreptunghiulară | Eliptică |
|---|---|---|---|
| | $d$; $\frac{D}{2}$; Axa arcului | $a$; $b$; Axa arcului | $2b$; $2a$; Axa arcului |
| Raportul de formă al arcului | $j=\frac{D}{d}$ | $j=\frac{D}{b}$ | $j=\frac{D}{2b}$ |
| Expresia efortului unitar maxim la încovoiere | $\sigma_{max}=\frac{32\,M_c}{\pi d^3}\cdot\frac{4j^2-j+1}{4j(j-1)}=\frac{M_c}{W}K$ | $\sigma_{max}=\frac{6\,M_c}{ab^2}\cdot\frac{3j^2-1+1}{3j(j-1)}=\frac{M_c}{W}K$ | $\sigma_{max}=\frac{4\,M_c}{\pi ab^2}\cdot\frac{4j^2-j+1}{4j(j-1)}=\frac{M_c}{W}K$ |
| Expresia efortului unitar de încovoiere simplu | $\sigma=\frac{10{,}2\,M_c}{\pi d^3}$ | $\sigma=\frac{6\,M_c}{ab^2}$ în cazul secțiunii pătrate $\sigma=\frac{6\,M_c}{a^3}$ | $\sigma=\frac{4\,M_c}{\pi ab^2}$ |
| Unghiul de rotire al arcului, în radiani | $\Phi_2=\frac{M_c l}{KEI}$ $\Phi_2=\frac{\sigma_{max}}{K^2}\cdot\frac{W}{E}\cdot\frac{l}{I}$ | $\Phi_2=\frac{M_c l}{KEI}$ $\Phi_2=\frac{\sigma_{max}}{K^2}\frac{W}{E}\frac{l}{I}$ | $\Phi_2=\frac{M_c l}{KEI}$ $\Phi_2=\frac{\tau_{max}}{K^2}\cdot\frac{W}{E}\cdot\frac{l}{I}$ |
| Unghiul de rotire al arcului corespunzător unei spire, rad. sau grd. | $\varphi_2=\frac{2\pi}{K^2}\cdot\frac{\sigma_{max}}{E}\cdot\frac{D}{d}$ $\varphi_2=\frac{360}{K^2}\cdot\frac{\sigma_{max}}{E}\cdot\frac{D}{d}$ | $\varphi_2=\frac{2\pi}{K^2}\frac{\sigma_{max}}{E}\frac{D}{a}$ $\varphi_2=\frac{360}{K^2}\frac{\sigma_{max}}{E}\frac{D}{a}$ | $\varphi_2=\frac{2\pi}{K^2}\frac{\sigma_{max}}{E}\frac{D}{b}$ $\varphi_2=\frac{360}{K^2}\frac{\sigma_{max}}{E}\frac{D}{b}$ |
| Rigiditatea arcului, kgf/grd | $C=\frac{KE\,d^4}{1170\,l}$ | $C=\frac{KE\,ab^3}{688\,l}$ | $C=\frac{KE\,ab^3}{71{,}3\,l}$ |
| Numărul de rotații de lucru al capătului acționat al arcului pornind din poziția liberă | $n_{rot}=\frac{\sigma_{max}\,l}{\pi K^2 Ed}$ | $n_{rot}=\frac{\sigma_{max}\,l}{K^2E\pi b}$ | $n_{rot}=\frac{\sigma_{max}\,l}{K^2E\pi b}$ |
| Lungimea desfășurată a arcului fără urechi, cm | $l=\frac{K^4 d^4}{1170\,C}$ | $l=\frac{KE\,ab^3}{688\,C}$ | $l=\frac{KE\,ab^3}{71{,}3\,C}$ |



unde se dă coeficientul $K$ pentru secțiunile circulare și dreptunghiulare.

În relațiile din tabelă, $M_c$ este valoarea de calcul a momentului incovoietor care solicită spira. Această valoare se determină în funcție de valorile maximă $M_2$ sau minimă $M_1$ a momentului de transmis, prin intermediul unui coeficient de corecție $A$, care depinde de numărul de cicluri la care va fi supus arcul, de modulul de elasticitate al materialului arcului și de raportul $\frac{M_2-M_1}{M_2}$:

$$M_c=\frac{M_2}{A} \qquad (6.158)$$

În tabela 6.19 se dau valorile coeficientului $A$, stabilite de S. L. Albright de la Hunter Spring Company, S.U.A.

Pentru determinarea elementelor constructive ale unui arc elicoidal cilindric de răsucire, în afara relațiilor din tabela 6.18, se mai folosesc și următoarele relații:

— numărul de spire al arcului liber $n=\frac{l}{\pi D}$; (6.159)

unde $l$ este lungimea desfășurată a arcului activ (fără urechi);

$D$ — diametrul mediu al spirei în poziție liberă a arcului;

— unghiul total de înfășurare al arcului liber (fig. 6.46)

$$\omega_0=\frac{2l}{D}; \qquad (6.160)$$

— unghiul total de înfășurare al arcului strîns sub acțiunea momentului maxim $M_2$ (fig. 6.46)

$$\omega_2=\omega_0+\Phi_2, \qquad (6.161)$$

unde $\Phi_2$ este unghiul de rotire al arcului sub acțiunea momentului $M_2$ față de poziția liberă;

— diametrul mediu al spirei arcului strîns sub acțiunea momentului maxim $M_2$

$$D_2=\frac{2l}{\omega_2}=\frac{2l}{\omega_0+\Phi_2}. \qquad (6.162)$$

Făcînd calculul se obține $D_2=D\frac{\omega_0}{\omega_2}$. (6.163)

Pentru numărul de spire al arcului strîns sub acțiunea momentului maxim $M_2$ se deduce relația:

$$n_2=n\frac{D}{D_2}. \qquad (6.164)$$

*Tabela 6.19*

**Coeficientul A de corecție al momentului de calcul $M_c$**

| Materialul arcului | $\frac{M_2-M_1}{M_2}$ | Numărul de cicluri: 5 000 | 10 000 | 50 000 | 100 000 | Nelimitat | Modulul de elasticitate, kgf/cm² |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sîrmă patentată (fost coardă pian) | 0,25 | 1,28 | 1,23 | 1,11 | 1,06 | 0,954 | $2{,}1\times10^6$ |
| | 0,50 | 1,23 | 1,16 | 1,00 | 0,926 | 0,762 | |
| | 0,75 | 1,21 | 1,12 | 0,928 | 0,845 | 0,652 | |
| | 1,00 | 1,17 | 1,08 | 0,864 | 0,771 | 0,551 | |
| Oțel de arcuri călit în ulei | 0,25 | 1,23 | 1,20 | 1,12 | 1,09 | 1,01 | $2\times10^6$ |
| | 0,50 | 1,18 | 1,13 | 1,00 | 0,945 | 0,819 | |
| | 0,75 | 1,14 | 1,07 | 0,896 | 0,821 | 0,650 | |
| | 1,00 | 1,10 | 1,01 | 0,800 | 0,710 | 0,500 | |
| Oțel crom-vanadiu călit în ulei și tras la rece | 0,25 | 1,05 | 1,02 | 0,955 | 0,927 | 0,859 | $2\times10^6$ |
| | 0,50 | 0,991 | 0,941 | 0,826 | 0,776 | 0,660 | |
| | 0,75 | 0,962 | 0,896 | 0,746 | 0,681 | 0,529 | |
| | 1,00 | 0,941 | 0,865 | 0,694 | 0,620 | 0,450 | |
| Oțel crom-siliciu călit | 0,25 | 1,35 | 1,32 | 1,24 | 1,20 | 1,11 | $2\times10^6$ |
| | 0,50 | 1,30 | 1,24 | 1,10 | 1,04 | 0,901 | |
| | 0,75 | 1,25 | 1,18 | 0,985 | 0,903 | 0,715 | |
| | 1,00 | 1,21 | 1,11 | 0,880 | 0,781 | 0,550 | |
| Bronz cu beriliu | 0,25 | 1,91 | 1,87 | 1,78 | 1,75 | 1,67 | $1{,}3\times10^6$ |
| | 0,50 | 1,84 | 1,78 | 1,64 | 1,58 | 1,42 | |
| | 0,75 | 1,78 | 1,71 | 1,51 | 1,42 | 1,22 | |
| | 1,00 | 1,75 | 1,62 | 1,38 | 1,27 | 1,00 | |
| Monel | 0,25 | 1,49 | 1,44 | 1,32 | 1,27 | 1,16 | $1{,}8\times10^6$ |
| | 0,50 | 1,41 | 1,33 | 1,14 | 1,06 | 0,866 | |
| | 0,75 | 1,36 | 1,24 | 0,995 | 0,889 | 0,644 | |
| | 1,00 | 1,31 | 1,19 | 0,901 | 0,777 | 0,511 | |
| Bronz fosforos | 0,25 | 1,33 | 1,29 | 1,16 | 1,10 | 0,979 | $1\times10^6$ |
| | 0,50 | 1,27 | 1,18 | 1,00 | 0,923 | 0,734 | |
| | 0,75 | 1,22 | 1,13 | 0,899 | 0,800 | 0,578 | |
| | 1,00 | 1,19 | 1,09 | 0,825 | 0,711 | 0,445 | |
| Alamă | 0,25 | 0,822 | 0,800 | 0,738 | 0,711 | 0,644 | $1\times10^6$ |
| | 0,50 | 0,795 | 0,751 | 0,658 | 0,618 | 0,511 | |
| | 0,75 | 0,769 | 0,722 | 0,591 | 0,534 | 0,420 | |
| | 1,00 | 0,738 | 0,689 | 0,542 | 0,478 | 0,334 | |



Înălțimea arcului în poziție strînsă (evitînd frecarea între spire):

$$H_{min}=d\,(n_2+1)=d\left(\frac{l}{\pi D_2}+1\right)=\frac{dl}{\pi D_2}+d; \qquad (6.165)$$

$$H_{max}=d\,(n_1+1)=\frac{dl}{\pi D_1}+d,$$

unde: $d$ este diametrul sîrmei;

$D_1$ — diametrul interior al arcului în poziție liberă.

La aceste valori ale înălțimilor trebuie adăugate înălțimile urechilor $h_1$ și $h_2$, necesare pentru prinderea arcului de fus și carcasă.

Diametrul exterior maxim al arcului în poziție liberă:

$$D_e=D+d \text{ (în cazul secțiunii circulare).}$$

Diametrul interior minim al arcului strîns:

$$D_1=D_e-d \text{ (în cazul secțiunii circulare).}$$

Diametrul maxim al fusului, $d_0$, se determină cu relația:

$$d_0=D_e-d-j_0;\ \text{unde jocul } j_0\geqslant 0{,}3\ d.$$

Diametrul minim al carcasei se determină cu relația:

$$D_e=D+d+j_c,\ \text{unde } j_c\geqslant 0{,}4\ d.$$

La rezolvarea problemelor practice se recomandă a se alege constructiv $\frac{D}{d}\geqslant 10$.

Lungimea totală $l_t$ a barei din care se execută spira arcului elicoidal de răsucire se determină cu relația:

$l_t=l+l_1+l_2$, unde $l_1$ și $l_2$ sînt lungimile urechilor.

### 6.8.3. Nomograme pentru calculul arcurilor elicoidale de răsucire

Pentru un calcul rapid al arcurilor elicoidale de răsucire fabricate din sîrmă de oțel cu secțiune circulară, cu modulul de elasticitate $E=2{,}1\times10^6$ kgf/cm², se utilizează diverse nomograme. În fig. 6.48 se dă

o astfel de nomogramă, în care sînt reprezentate pe mai multe scări elementele principale de calcul şi anume:

— unghiul de rotaţie corespunzător unei spire, $\varphi_2$; diametrul sîrmei, $d$; efortul unitar la încovoiere ales, $\sigma_i$; momentul de încovoiere de calcul, $M_2$; raportul de formă al arcului, corespunzător poziţiei sale $j_1=j_2=j=\frac{D}{d}$.

Scara $I-I$ reprezintă scara de legătură a nomogramei între diferitele mărimi, legătura realizîndu-se printr-un acelaşi punct al ei.

Dacă se dă de exemplu: $M_2=14{,}8$ kgf·cm; $d=0{,}2$ cm şi $j=8$, se poate determina $\varphi_2$ şi $\sigma_i$. Se duce secanta care leagă scara momentelor de scara diametrelor şi care taie scara $I-I$ în punctul $g$. Se uneşte acest punct cu punctele corespunzătoare valorilor 8 de pe scările $j_1$ şi $j_2$. Secanta ce vine la scara $j_1$ taie scara $\sigma_i$ într-un punct care determină efortul unitar din secţiune, iar secanta ce vine de la scara $j_2$ taie scara unghiului de rotire într-un punct care determină valoarea lui $\varphi_2$, corespunzător pentru o spiră.

Nomograma poate fi utilizată şi pentru alte materiale cu modul corespunzător $E'$. În aceste cazuri rezultatul obţinut pe scara unghiului de rotire $\varphi_2$ se multiplică după relaţia:

$$\psi_2'=\frac{2{,}1\times10^6\times\varphi_2}{E'}. \qquad (6.166)$$

### 6.8.4. Arcuri elicoidale multiple de răsucire

În cazul momentelor de răsucire mari rezultă secţiuni de sîrmă mari şi un spaţiu pentru arc mare. Pentru a evita secţiunile mari ale sîrmei, care duc la un proces tehnologic greoi de execuţie a arcului şi pentru a obţine pentru arc un spaţiu mai restrîns, se recomandă folosirea arcului multiplu, format din mai multe arcuri elicoidale cilindrice de răsucire, aşezate coaxial, care preiau toate la un loc momentul total de răsucire $M$.

La calculul de dimensionare a arcului multiplu se pun următoarele condiţii:

a. Suma momentelor preluate de arcurile componente este egală cu momentul de răsucire de transmis

$$M=M_1+M_2+M_3+\ldots+M_n. \qquad (6.167)$$

b. Unghiul de răsucire este acelaşi la toate arcurile

$$\Phi=\Phi_1=\Phi_2=\ldots=\Phi_n. \qquad (6.168)$$

c. Efortul unitar de încovoiere trebuie să fie același pentru toate arcurile pentru ca materialul să fie la fel utilizat

$$\sigma=\sigma_1=\sigma_2=\ldots=\sigma_n. \tag{6.169}$$

d. Înălțimea arcurilor trebuie să fie aceeași

$$H=n_1d_1+n_2d_2=\ldots=n_nd_n. \tag{6.170}$$

Aceste condiții sînt satisfăcute dacă secțiunile spirelor arcurilor sînt înscrise într-o parabolă a cărei expresie este de forma

$$y^2=d_i^2=\frac{2}{3}\,\frac{H}{E}\,x. \tag{6.171}$$

Pentru dimensionarea arcului elicoidal de răsucire multiplu se dimensionează în prealabil un arc elicoidal de răsucire simplu echivalent, pentru a stabili valorile: $\Phi$, $\sigma$ și $M$, care intervin în calcul, iar apoi, utilizînd condițiile arătate mai înainte, se poate trece la dimensionarea arcurilor componente.

## 6.9. Arcuri elicoidale profilate

### 6.9.1. Generalități

În diferite construcții de mașini sau de aparate se întîlnesc arcuri elicoidale folosite în special ca arcuri de compresiune cunoscute sub numele de arcuri profilate. Denumirea acestora provine de la felul suprafeței de rotație pe care se află axa spirelor lor și de la modul de înclinare al diverselor porțiuni ale spirelor față de planul de bază, perpendicular pe axa arcului.

Ceea ce este specific acestor arcuri și face ca în ciuda unor dificultăți tehnologice de construcție ele să fie totuși folosite, este faptul că au o caracteristică neliniară, care corespunde anumitor scopuri cerute în construcția de mașini și de aparate. De asemenea, arcurile profilate au un gabarit mic și pot asigura o frecvență convenabilă oscilațiilor proprii ale sistemului elastic.

Principalele tipuri de arcuri profilate utilizate sînt:

— arcurile conice cu unghi de pantă constant;
— arcurile conice cu pas constant;
— arcurile paraboloidale cu unghi de pantă constant.

Datorită faptului că spirele și unghiul de înclinare sînt variabile în timpul încărcării și deformării arcului, unele spire vin în contact între

ele înaintea altora, astfel că se poate considera că din momentul rezemării lor, ele nu mai lucrează, în timp ce spirele care nu au venit încă în contact continuă să lucreze. Acest lucru face ca rigiditatea arcului să fie variabilă (caracteristică neliniară). Caracteristica arcului poate fi astfel liniară pînă la începutul culcării (rezemării) spirelor, și apoi continuă a fi neliniară pînă la culcarea tuturor spirelor. În fig. 6.49 este reprezentată o astfel de caracteristică pentru un arc spiral conic cu unghi de pantă constant. Pînă la punctul $A$, care corespunde rezemării spirei a doua pe prima, caracteristica este liniară (rigiditatea constantă), după care caracteristica arcului devine neliniară.

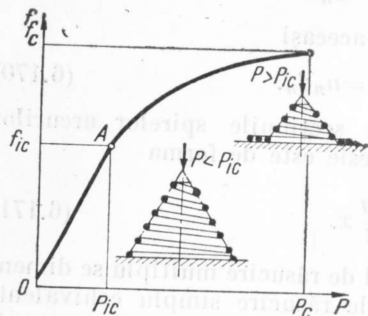


Fig. 6.49

### 6.9.2. Elemente geometrice principale ale arcurilor elicoidale profilate

#### 6.9.2.1. Arcuri conice cu unghi de pantă constant

Suprafața directoare la aceste arcuri (fig. 6.50) este o suprafață conică. Desfășurata axei spirelor este o dreaptă care face unghiul $\alpha$ cu orizontala. Folosind sistemul de coordonate cu originea în vîrful conului, care are unghiul la vîrf $\psi$, se poate scrie relațiile:

$$r = z\ \mathrm{tg}\frac{\psi}{2}, \qquad z = s\ \mathrm{tg}\ \alpha \tag{6.172}$$

de unde

$$r = s\ \mathrm{tg}\ \alpha\ \mathrm{tg}\frac{\psi}{2}, \tag{6.173}$$

unde $s$ este lungimea arcului de spiră măsurat de la origine pînă la secțiunea considerată.

Lungimea arcului de spiră și a unui element de arc sînt date de relațiile:

$$s = \mathrm{cotg}\ \alpha\ \mathrm{cotg}\frac{\psi}{2}\ r;\quad ds = \mathrm{cotg}\ \alpha\ \mathrm{cotg}\frac{\psi}{2}\ dr. \tag{6.174}$$



Proiecția în plan este o spirală logaritmică.

Lungimea unui element de arc al spiralei în coordonate polare

$$ds = \sqrt{(rd\varphi)^2 + (dr)^2}. \tag{6.175}$$

Făcînd calculul se obține

$$r = \sqrt{\mathrm{cotg}^2\ \alpha\ \mathrm{cotg}^2\frac{\psi}{2} - 1}\ .\ \frac{dr}{d\varphi}, \tag{6.176}$$

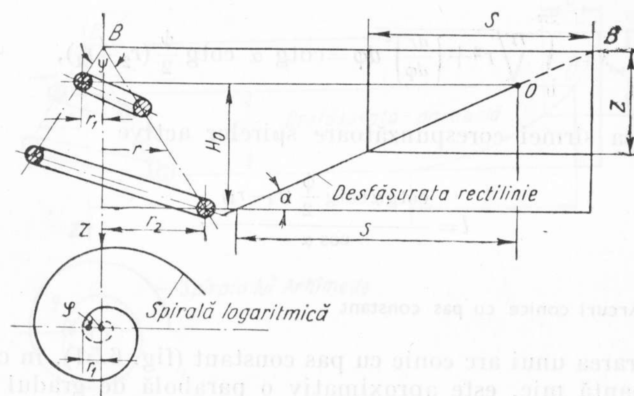


Fig. 6.50

unde notînd $A = \mathrm{cotg}\ \alpha\ \mathrm{cotg}\frac{\psi}{2}$, se obține după integrare

$$r = ce^{\frac{\varphi}{\sqrt{A^2-1}}}. \tag{6.177}$$

Punînd condiții la limită:

$\varphi = 0$; $r = r_1$ rezultă $c = r_1$.

$\varphi = 2\pi n$; $r = r_2$ ($n$ fiind numărul de spire al arcului) rezultă:

$$r_2 = r_1 e^{\frac{2\pi n}{\sqrt{A^2-1}}}. \tag{6.178}$$

Deoarece se poate considera $\frac{1}{\sqrt{A^2-1}} \approx \frac{1}{A}$, mărimea $A^2$ fiind mult mai mare ca 1, atunci se obține:

$$r = r_1 e^{\frac{\varphi}{\sqrt{A^2-1}}} \approx r_1 e^{\frac{\varphi}{A}} \approx r_1 e^{\frac{\varphi}{\mathrm{cotg}\,\alpha\,\mathrm{cotg}\frac{\psi}{2}}} = r_1 e^{\varphi\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\psi}{2}} \tag{6.179}$$

Înălţimea liberă a arcului $H_0=(r_2-r_1)\operatorname{cotg}\frac{\psi}{2}$. (6.180)

Pasul arcului este variabil şi se determină cu relaţia

$$p=re^{\varphi \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}\left(e^{2\pi \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}-1\right)\operatorname{cotg}\frac{\psi}{2}. \tag{6.181}$$

Lungimea totală a arcului de spirală în plan

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt[n]{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi=\operatorname{cotg}\alpha\ \operatorname{cotg}\frac{\psi}{2}(r_2-r_1), \tag{6.182}$$

iar lungimea sîrmei corespunzătoare spirelor active

$$l=\frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\frac{\psi}{2}(r_2-r_1)}{\cos\alpha}. \tag{6.183}$$

#### 6.9.2.2. Arcuri conice cu pas constant

Desfăşurarea unui arc conic cu pas constant (fig. 6.51), în cazul unui unghi de pantă mic, este aproximativ o parabolă de gradul al doilea (de obicei unghiul nu depăşeşte 6...8°).

Proiecţia în plan a unui arc conic cu pas constant este o spirală arhimedică.

Folosind notaţiile din figură se poate demonstra că:

$$r=r_1+\frac{p\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{2}\varphi=r_1+t\varphi, \qquad t=\frac{p\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{2} \tag{6.184}$$

Pentru raza spirei maxime se poate scrie relaţia:

$$r_2=r_1+t\,2\pi n; \tag{6.185}$$

$n$ fiind numărul de spire.

Lungimea totală a arcului de spirală arhimedică în plan corespunzătoare porţiunii active a spirelor:

$$S\approx(r_2+r_1)\pi n. \tag{6.186}$$



Lungimea sîrmei necesare pentru executarea spirelor active ale arcului este dată de relaţia:

$$l=\frac{(r_2+r_1)\pi n}{\cos\alpha_m}, \tag{6.187}$$

$\alpha_m$ fiind unghiul de pantă mediu al arcului.

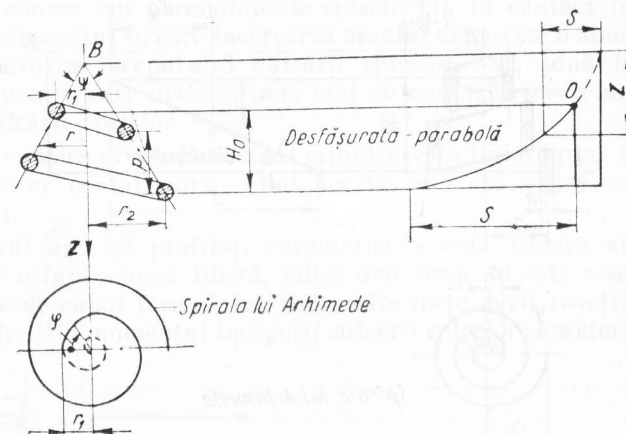



Fig. 6.51

#### 6.9.2.3. Arcuri paraboloidale

În majoritatea cazurilor se foloseşte tipul de arc paraboloidal la care unghiul de pantă $\alpha$ al spirelor este constant (fig. 6.52).

În acest caz proiecţia axei spirelor în plan este de forma unei spirale arhimedice dată de ecuaţia:

$$r=r_1+\frac{r_2-r_1}{2\pi n}\varphi=r_1+t\varphi. \tag{6.188}$$

Lungimea arcului $S_\varphi$ al spiralei arhimedice pe porţiunea cuprinsă între valorile unghiului polar de la 0 la $\varphi$, corespunzătoare razelor $r_1$ şi $r$, este dată de relaţia:

$$S_\varphi\approx\frac{r+r_1}{2}\varphi. \tag{6.189}$$

Folosind notaţiile de pe figură, coordonata $z$ a centrului secţiunii transversale a spirei căreia îi corespunde unghiul $\varphi$, se determină cu relaţia:

$$z=S_{\varphi}\,\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\varphi(2r_1+l\varphi)}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha. \qquad (6.190)$$

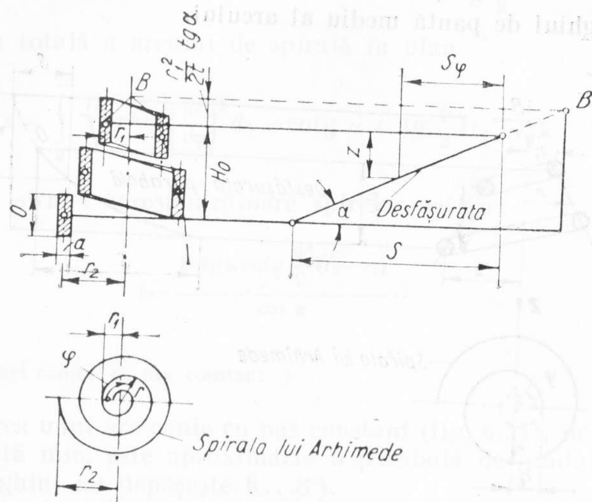



Fig. 6.52

Din cele două relaţii se obţine:

$$r^2=2lz\,\mathrm{cotg}\,\alpha+r_1^2. \qquad (6.191)$$

Vîrful parabolei se află deasupra spirei celei mai mici, de rază $r_1$ la distanţa

$$z_B=-\frac{r_1^2}{2l}\,\mathrm{tg}\,\alpha \qquad (6.192)$$

de originea stabilită în planul spirei mici.

Pasul arcului este variabil şi este dat de relaţia:

$$p=2\pi(r+\pi l)\,\mathrm{tg}\,\alpha. \qquad (6.193)$$

Lungimea sîrmei pentru spirele active ale arcului

$$l=\frac{(r_2+r_1)\pi n}{\cos\alpha}. \qquad (6.194)$$



### 6.9.3. Calculul arcurilor profilate

În cazul arcurilor profilate, alegerea relaţiilor de calcul, care se folosesc, depinde de modul lor de funcţionare.

Dacă la arcurile cilindrice cu unghi de pantă $\alpha$, strict constant, toate spirele vin simultan în contact la realizarea sarcinii maxime, la arcurile profilate conice sau paraboloidale spirele vin în contact treptat, începînd din momentul în care încărcarea arcului depăşeşte o anumită valoare corespunzătoare începutului culcării spirelor $P_{ic}$, pînă la o valoare maximă, pentru care toate spirele sînt în contact, corespunzătoare sfîrşitului culcării spirelor $P_{sc}$.

Caracteristica arcului elicoidal cilindric este liniară pînă în momentul corespunzător comprimării, cînd acesta prezintă o inflexiune bruscă (fig. 6.53).

În cazul arcului profilat, caracteristica este liniară atît timp cît acesta are o funcţionare liberă, adică atît timp cît este rezemat pe cele două spire de capăt fără să intervină alte forţe decît reacţiile pe aceste spire finale. Din momentul începerii culcării spirelor caracteristica devine

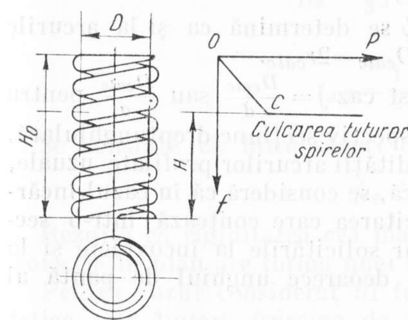



Fig. 6.53

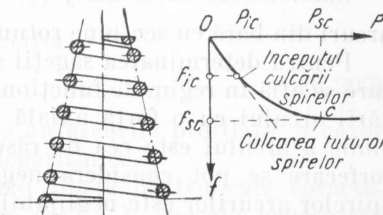



Fig. 6.54

neliniară. Un exemplu este dat în fig. 6.54, în care este reprezentat un arc conic şi caracteristica lui.

Se disting astfel două regimuri de funcţionare pentru arcurile profilate:

— funcţionare liberă, în care arcul este rezemat numai pe spirele de capăt, fără ca celelalte spire să fie în contact; această stare arcul o păstrează pînă la o anumită încărcare, cînd începe culcarea spirelor ($P_{ic}$);

— funcționare limitată la suprafața de reazem, care începe o dată cu depășirea sarcinii $P_{ic}$, spirele începînd să se culce treptat pînă se ajunge la comprimarea totală, sub acțiunea sarcinii $P_{sc}$.

În cazul arcurilor profilate, o dată cu deformarea lor sub sarcină, se produce și modificarea suprafețelor directoare, care diferă de suprafețele directoare inițiale ale arcului nedeformat.

Calculul de rezistență al arcurilor profilate se face cu ajutorul acelorași relații valabile și pentru arcurile elicoidale cilindrice de întindere-compresiune, cu observația că, în locul diametrului $D$ trebuie introdus în calcul diametrul $D_{calc}$ al spirei libere maxime, care nu a venit încă în contact. În acest mod, atît în cazul funcționării limitate — la suprafața de reazem, cît și în cazul funcționării libere, relațiile de calcul devin:

$$\tau_{max}=K\frac{P_{max}D_{calc}}{2W_p}=\frac{8KP_{max}D_{calc}}{d^3}=\frac{8KP_{max}j}{d^2}\leqslant\tau_a, \quad (6.195)$$

în cazul arcului executat din sîrmă cu secțiune rotundă, iar în cazul arcului executat din bară cu secțiune dreptunghiulară:

$$\tau_{max}=\psi\frac{PD_{calc}}{ab\sqrt{ab}}. \quad (6.196)$$

În aceste relații coeficienții $K$ și $\psi$ se determină ca și la arcurile elicoidale cilindrice, însă în funcție de $D_{calc}=2r_{calc}$.

Coeficientul de formă $j$ se ia în acest caz $j=\frac{D_{calc}}{d}$ sau $\frac{D_{calc}}{a}$ pentru arcuri din bară cu secțiune rotundă și respectiv secțiune dreptunghiulară.

Pentru determinarea săgeții și a rigidității arcurilor profilate uzuale, care se află în regim de funcționare liberă, se consideră că în cazul încărcării arcului cu o forță axială $P$, solicitarea care contează într-o secțiune a arcului este cea de răsucire, iar solicitările la încovoiere și la forfecare se pot considera neglijabile, deoarece unghiul de pantă al spirelor arcurilor este neglijabil.

Pe baza acestei ipoteze săgeata se poate determina folosind integrala lui Mohr:

$$f=\int_0^l\frac{M_tM_{t1}ds}{C}, \quad (6.197)$$

în care: $M_t=Pr$; $M_{t1}=lr$; $C=GI_p$.

Lungimea elementului de arc $ds=rd\varphi$.

Din aceste relații se poate constata că săgeata nu depinde de unghiul de pantă al spirelor, ci de unghiul $\varphi$, adică este determinată de proiecția



sa pe planul perpendicular la axa arcului, care este o spirală exprimată printr-o funcție de forma $r=f(\varphi)$.

În acest caz se disting două forme:

— cazul unei spirale arhimedice $r=r_1+l\varphi$;

— cazul unei spirale logaritmice $r=r_1e^{m\varphi}$.

Efectuînd calculele se obține pentru primul caz:

$$f_{arh}=\frac{\pi Pn(r_2+r_1)(r_2^2+r_1^2)}{2C}; \quad (6.198)$$

pentru al doilea:

$$f_{lg}=\frac{P(r_2^3-r_1^3)}{3C}\cdot\frac{2\pi n}{\ln\frac{r_2}{r_1}}. \quad (6.199)$$

De obicei aceste arcuri se compară cu arcurile elicoidale cilindrice cu diametrul $D=2r_2$, executate dintr-un semifabricat care are același profil și aceeași lungime ca și arcul profilat. Comparînd săgețile se obține:

$$f_{lg}=\frac{1}{3}f_{cil}\left[1+\frac{r_1}{r_2}+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right] \quad (6.200)$$

și

$$f_{arh}=\frac{1}{2}f_{cil}\left[1+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]. \quad (6.201)$$

Se constată că între săgeți există relația

$$f_{lg}<f_{arh}<f_{cil}. \quad (6.202)$$

Rezultă că rigiditatea cea mai mare o au arcurile profilate, a căror proiecție în plan are forma unei spirale logaritmice.

Pentru cazul considerat al funcționării libere pentru care caracteristica este liniară (sarcina de încărcare $P\leqslant P_{ic}$), energia acumulată de arc

$$W=\frac{Pf}{2}. \quad (6.203)$$

În tabela 6.20 sînt date relațiile de calcul mai importante pentru arcurile profilate uzuale în regim de funcționare liberă.

În cazul arcurilor profilate uzuale, care lucrează în regim de funcționare limitată la suprafața de reazem, relațiile de calcul arătate anterior nu mai sînt valabile și este necesar să fie folosite relațiile de calcul bazate pe teoria generală de calcul a arcurilor, ținînd seama de culcarea

Tabela 6.20

**Relații de calcul pentru arcuri profilate (uzuale) în regim de funcționare liberă $P \leqslant P_{ic}$**

| Forma secțiunii transversale a spirei | $\tau$ kgf/cm² | Rigiditatea arcurilor paraboloidale și a arcurilor conice cu pas constant ($p$=const) $c=\frac{P}{f}$, kgf/cm | Rigiditatea arcurilor conice cu unghi de pantă constant ($\alpha$=const) $c=\frac{P}{f}$, kgf/cm | Energia potențială a arcurilor paraboidale și a arcurilor conice cu pas constant ($p$=const) $U$, kgf·cm | Energia potențială a arcurilor conice cu unghiu de pantă constant. ($\alpha$=const.) $W$, kgf·cm |
|---|---|---|---|---|---|
| (secțiune circulară, $d$) | $\tau_{max}=\frac{16Pr^2}{\pi d^3}$ | $c=\frac{Gd^4}{16\,n(r_2+r_1)(r_2^2+r_1^2)}$ | $c\approx\frac{0{,}294\cdot Gd^4 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi n(r_2^3-r_1^3)}$ | $U=\frac{1}{8}\,\frac{\tau_{max}^2}{G}\,V\left[1+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]$ | $W=\frac{1}{12}\,\frac{\tau_{max}^2}{G}V\times\left[1+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]$ |
| (secțiune dreptunghiulară $a \times b$, $b \geqslant a$; Axa arcului) | $\tau_{max}=\frac{Pr_2}{\zeta a^2 b}$; $\tau_{max}=\xi\frac{2Pr_2}{a^3}$ | $c=\frac{Ga^4}{2\Delta n(r_2+r_1)(r_2^2+r_1^2)}$ | $c=\frac{3\eta Ga^3 b\cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi n(r_2^3-r_1^3)}$ | $U=\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{\tau_{max}^2}{G}\cdot V\left[1+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]$ | $W=\frac{\varphi}{3}\,\frac{\tau_{max}^2}{G}V\times\left[1+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]$ |

*Observații:* 1. În aceste relații: $V$ este volumul ocupat de spirele active; $r_2$ — raza maximă; $r_1$ — raza minimă a porțiunii active; $\tau_{max}$ — efectul unitar tangențial maxim în secțiunea transversală a spirei pentru $r=r_2$, neglijînd curbura.
2. Valorile coeficienților $\xi$, $\Delta$ și $\varphi$ sînt date în tabela 6.7 în funcție de raportul $\frac{b}{a}$ iar coeficienții $\zeta$ și $\eta$ sînt dați în diagrama din fig. 6.16.



spirelor. Această teorie a fost elaborată de E. P. Popov și se bazează pe ipoteza că forma spiralei plane, care rezultă prin proiectarea spirelor arcului elicoidal pe planul perpendicular pe axa sa nu se modifică în timpul comprimării arcului și pe ipoteza că procesul de deformare al spirelor se termină în momentul culcării lor.

Relațiile principale de calcul pentru arcurile elicoidale profilate înt date în tabela 6.21.

### 6.9.4. Construirea caracteristicii arcurilor elicoidale profilate

Problema directă a construirii caracteristicii arcurilor elicoidale profilate și cea inversă a proiectării arcurilor elicoidale profilate pe baza unei caracteristici date a fost tratată și dezvoltată în foarte multe lucrări, dintre care se evidențiază studiile lui E. P. Popov și D. C. Ponomarev.

În cazul arcurilor elicoidale profilate, forma spiralei care reprezintă proiecția spirei arcului pe planul perpendicular pe axă (fig. 6.55) este dată de o ecuație de forma:

$$r=r(\varphi), \qquad (6.204)$$

unde $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$,
care se consideră invariabilă în timpul încărcării arcului.

În același timp, ecuația suprafeței directoare a arcului profilat este ecuația secțiunii sale meridiane și are o expresie de forma:

$$z=z(r), \qquad (6.205)$$

variabilă o dată cu valoarea sarcinii.

Pentru arcul neîncărcat

$$z_0=z_0(r). \qquad (6.206)$$

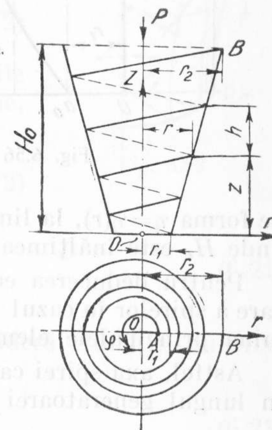


Fig. 6.55

În aceste ecuații, unghiul polar $\varphi$ capătă valori între limitele $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi n$, iar coordonata $z_0$ între limitele $0 \leqslant z_0 \leqslant H_0$.

Se poate observa că raza de contact a spirei, care se culcă la o anumită valoare a sarcinii $P$, depinde de valoarea sarcinii și se poate exprima sub forma:

$$r_c=f(P). \qquad (6.207)$$

Generatoarea suprafeței directoare a unui arc elicoidal profilat se modifică pe măsura încărcării sale. Astfel, în cazul arcului liber, forma

generatoarei este cea dată de curba $a_0-b_0$ din fig. 6.56, iar în cazul comprimării maxime, forma generatoarei se schimbă și capătă alura curbei $a_n-b_n$ (fig. 6.56 și 6.57).

Față de sistemul de axe cu originea în $O_1$, generatoarea $a_n-b_n$ a, suprafeței de culcare a unui arc profilat se reprezintă printr-o ecuației

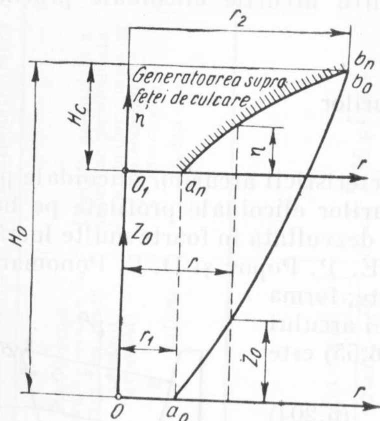



Fig. 6.56

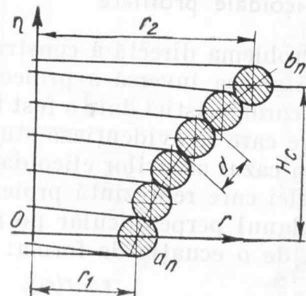



Fig. 6.57

de forma $\eta=\eta(r)$, la limită fiind valabile relațiile: $\eta(r_1)=0$ și $\eta(r_2)=H_c$ unde $H_c$ este înălțimea arcului complet comprimat.

Pentru deducerea ecuației $\eta=\eta(r)$ a generatoarei suprafeței de culcare a spirelor în cazul unui arc profilat, folosind fig. 6.58, se vor determina principalele elemente geometrice necesare.

Astfel, axa spirei care intră în contact cu spira vecină se deplasează în lungul generatoarei cu o distanță dată de relația:

$$\Delta g=\frac{d}{2\pi}\Delta\varphi, \tag{6.208}$$

în care: $d$ este diametrul spirei;

$\Delta\varphi$ — creșterea unghiului polar $\varphi$, corespunzătoare culcării spirei la o creștere a sarcinii.

Valoarea corespunzătoare a deplasării pe axa $\eta$ a centrului spirei este:

$$\Delta\eta=\sqrt{(\Delta g)^2-(\Delta r)^2}=\Delta r\sqrt{\left(\frac{d}{2\pi}\right)^2\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta r}\right)^2-1}. \tag{6.209}$$



Expresia funcției căutate $\eta(r)$ se obține deci din integrala:

$$\eta(r)=\int_{r_1}^{r}\sqrt{\left(\frac{d}{2\pi}\right)^2\cdot\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2-1}\cdot dr, \tag{6.210}$$

în care derivata $\frac{d\varphi}{dr}$ se obține din ecuația $r=r(\varphi)$ a spiralei proiectate în plan.

Lungimea unui element din spiră poate fi considerată cu aproximație

$$ds=rd\varphi. \tag{6.211}$$

Dacă la o spiră expresia săgeții, corespunzătoare culcării spirei cu o lungime elementară $ds$, este $df$, valoarea modificării unghiului de pantă (care de altfel este mic) este:

$$d\alpha=\frac{df}{ds}=\frac{1}{r}\frac{df}{d\varphi}. \tag{6.212}$$

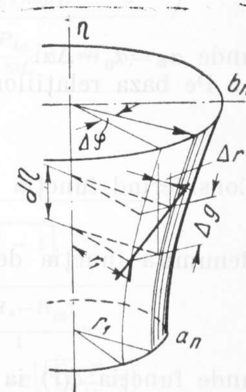



Fig. 6.58

Ținînd seamă de expresia săgeții pentru arcurile elicoidale cilindrice de întindere — compresiune, se poate scrie:

$$df=\frac{Pr^3d\varphi}{C} \tag{6.213}$$

și se obține

$$d\alpha=\frac{Pr^2}{C}, \tag{6.214}$$

unde $C$ este rigiditatea barei; $C=GI_p$.

După notațiile lui E. P. Popov se consideră funcția auxiliară $\xi(r)=\frac{r^3}{C}\frac{d\varphi}{dr}$, astfel că:

$$df=P\xi(r)\,dr \tag{6.215}$$

sau săgeata

$$f=P\int_{r_1}^{r_2}\xi(r)\,dr. \tag{6.215,a}$$

Pentru a lega expresia ecuației secțiunii meridiane a suprafeței directoare a arcului neîncărcat, $z_0(r)$, de ecuația respectivă a aceluiași arc încărcat, $z(r)$, se pot scrie următoarele relații:

— unghiul de pantă inițial $\alpha_0$ este dat de relația:

$$\alpha_0=\frac{dz_0}{ds}=\frac{dz_0}{dr}\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi},$$

sau

$$\alpha_0=\frac{1}{\xi(r)}\,\frac{r^2}{C}\,\frac{dz_0}{dr}; \tag{6.216}$$

— unghiul de pantă pentru același element al spirei, cînd coincide cu suprafața de culcare, devine:

$$\alpha_\eta=\frac{d\eta}{ds}=\frac{dr}{rd\varphi}\,\frac{d\eta}{dr}=\frac{1}{\xi(r)}\,\frac{r^2}{C}\,\frac{d\eta}{dr}, \tag{6.217}$$

unde $\alpha_\eta=\alpha_0-\Delta\alpha$.

Pe baza relațiilor amintite se obține:

$$P=\left[\frac{1}{\xi(r)}\,\frac{d\,(z_0-\eta)}{dr}\right]_{r=r_c}. \tag{6.218}$$

Considerînd funcția

$$\zeta(r)=z_0(r)-\eta(r) \tag{6.219}$$

denumită funcția de culcare, se obține

$$P=\frac{1}{\xi(r_c)}\left(\frac{d\zeta}{dr}\right)_{r=r_c} \tag{6.220}$$

unde funcția $\zeta(r)$ ia valorile la limita $\zeta(r_1)=0$ și $\zeta(r_2)=H_0-H_c$.

Relația pentru valorile sarcinii $P$, cuprinse între începutul și sfîrșitul culcării spirelor $P_{ic}\leqslant P\leqslant P_{sc}$, este următoarea:

$$f=P\int_{r_1}^{r_2}\xi(r)dr+[H_0-H_c]-[z_0(r_c)-\eta(r_c)]. \tag{6.221}$$

Ecuațiile (6.220) și (6.221) constituie ecuațiile parametrice ale caracteristicii arcului elicoidal profilat pe porțiunea neliniară și care, prin eliminarea parametrului $r_c$, devine ecuația curbei caracteristicii arcului.

**Relații pentru calculul arcurilor c**

| Mărimile care se determină \ Felul arcului | Arc paraboloidal | | |
|---|---|---|---|
| | $(r_2-r_1)>nd$ | $(r_2-r_1)<nd$ | ( |
| **Forma proiecției arcului în plan** | $r=r_1+\frac{(r_2-r_1)}{2\pi n}\varphi$ — spirala arhimedică | | |
| **Forța pentru care începe culcarea spirelor $P_{ic}$** | $P_{ic}=\frac{C\cdot H_0}{\pi n(r_2+r_1)r_2^2}$ | $P_{ic}=\frac{C}{\pi n r_2^2}\left(\frac{H_0}{r_2+r_1}-\frac{H_m}{2r_2}\right)$ | P |
| **Săgeata corespunzătoare începerii culcării spirelor ($P=P_{ic}$)** | $f_{ic}=0{,}5\,(1+\lambda_0^2)H_0$ | $f_{ic}=\frac{P_{ic}\pi n(r_1^2+r_2^2)(r_1+r_2)}{2C}$ | $f_{ic}=0{,}2$ |
| **Săgeata arcului sub acțiunea unei forțe mai mici decît cea corespunzătoare începerii culcării spirelor ($0\leqslant P\leqslant P_{ic}$)** | $f=\frac{P\pi n(r_2^2+r_1^2)(r_2+r_1)}{2C}$ | | |
| **Forța pentru care se realizează comprimarea totală a arcului (sfîrșitul culcării spirelor $P_{sc}$)** | $P_{sc}=\frac{P_{ic}}{\lambda_0^2}$ | $P_{sc}=\frac{C}{\pi n r_1^2}\left(\frac{H_0}{r_1+r_2}-\frac{H_m}{2r_1}\right)$ | |
| **Săgeata corespunzătoare unei forțe $P$ $P_{ic}\leqslant P\leqslant P_{sc}$** | $f=\frac{0{,}5H_0}{1-\lambda_0^2}\left(2-\frac{P_{ic}}{P}-\frac{P}{P_{ic}}\cdot\lambda_0^4\right)$ | $f\approx\frac{0{,}5\,(H_0-H_m)}{1-\lambda_0^2}\times\left(2-\frac{P_1}{P}-\frac{P}{P_1}\lambda_0^4\right)$ unde $P_1=\frac{C(H_0-H_m)}{\pi n(r_1+r_2)r_2^2}$ | $f=\frac{0{,}25\,H_0}{1-\lambda_0}$ |
| **Raza de calcul corespunzătoare unei forțe $P$ după începerea culcării: $r_{calc}$ pentru $P_{ic}\leqslant P\leqslant P_{sc}$** | $r_{calc}=r_2\sqrt{\frac{P_{ic}}{P}}$ | $r_{calc}\approx r_2\sqrt{\frac{P_1}{P}}$ | $r_{cal}$ |
| **Momentul de răsucire maxim pentru calculul eforturilor unitare maxime pentru o forță $P$ $P_{ic}\leqslant P\leqslant P_{sc}$** | $M_t=r_2\sqrt{P_{ic}P}$ | $M\approx r_2\sqrt{P_1P}$ | $M_t=$ |

**În aceste relații:** $H_0$ este înălțimea liberă a arcului;
$r_1$ — raza minimă a porțiunii active a spirelor;
$r_2$ — raza maximă a porțiunii active a spirelor;
$C=GIp$; $\lambda_0=\frac{r_1}{r_2}$; $H_m=\sqrt{(nd)^2-(r_2-r_1)^2}$;

$$r_m=\frac{d}{2\,\pi m(1+\pi m)};\; m=\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\,\pi n}.$$

# 7.

# Arcuri inelare

## 7.1. Generalităţi

Arcurile inelare se compun dintr-un număr de inele exterioare şi interioare, care au suprafeţele de contact dublu conice şi sînt suprapuse axial, alternativ, formînd un ansamblu elastic. Sub acţiunea unei sarcini axiale inelele interioare se împănează în interiorul inelelor exterioare, astfel că lungimea totală a ansamblului de inele se scurtează. În fig. 7.1 este reprezentată schema unui ansamblu de arcuri inelare în stare liberă (fig. 7.1, *a*) şi în stare încărcată (fig. 7.1, *b*).

Ansamblul de inele suprapuse se aşază într-o montură metalică, telescopică, astfel că arcul poate fi acţionat numai în sens axial la compresiune.

Sub acţiunea sarcinii axiale inelele exterioare sînt solicitate la întindere, iar cele interioare la compresiune.

Arcurile inelare prezintă următoarele avantaje:

Principalul avantaj al arcurilor inelare provine din faptul că între inele se dezvoltă forţe de frecare foarte mari, care fac ca ansamblul să aibă o capacitate de încărcare foarte mare în raport cu dimensiunile sale şi o capacitate mare de amortizare a energiilor mari de şoc. Energia transmisă prin şoc arcului se amortizează prin frecarea dintre inele în raportul 2/3 din valoarea totală, rămînînd ca restul de 1/3 să se amortizeze prin deformaţia elastică a inelelor. De asemenea trebuie remarcat faptul că aceste arcuri au un recul foarte mic. Arcul redă, în caz de destindere, numai 1/3 din lucrul mecanic de şoc acumulat prin comprimare.

Ocupă un volum relativ mic.

Materialul din inele este solicitat uniform și prin aceasta este superior altor arcuri în ceea ce privește capacitatea de lucru.

Din cauza condițiilor de solicitare, durata de funcționare a arcurilor este foarte mare.

În cazul ruperii unui inel nu este necesară înlocuirea întregului arc, ci numai a inelului rupt.

Arcurile inelare nu se distrug prin supraîncărcare, deoarece la atingerea săgeții maxime inelele se ating frontal între ele.

Arcurile inelare prezintă dezavantajul că nu pot fi utilizate în toate cazurile ca arcuri de compresiune, prin faptul că, datorită frecărilor,

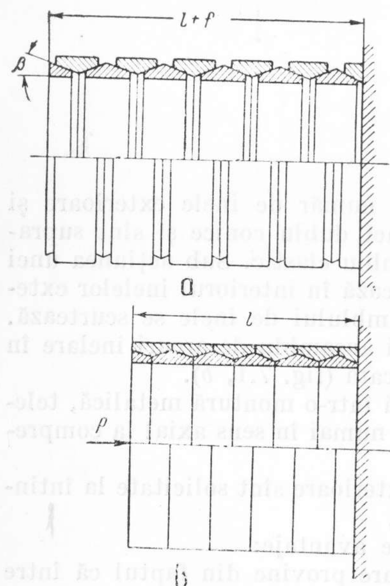



Fig. 7.1

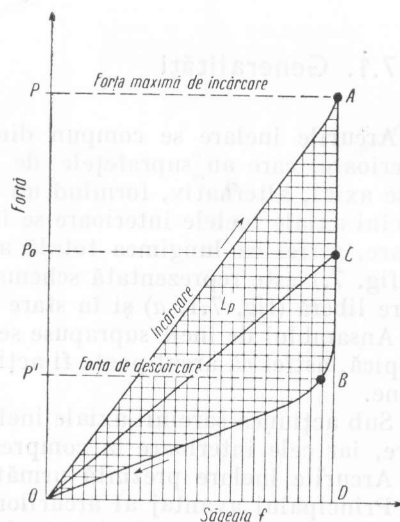



Fig. 7.2

forța elastică la descărcare este mult mai mică decît cea de încărcare, astfel că legătura elastică în ambele sensuri — comprimare și întindere — nu este similară. În acest sens, la arcul inelar caracteristica la încărcare diferă de cea de la descărcare. În fig. 7.2 sînt reprezentate cele două caracteristici ale arcului inelar.



Din această cauză arcurile inelare au un domeniu de utilizare restrîns. Ele sînt folosite ca arcuri-tampon pentru amortizarea șocurilor puternice la vagoanele de cale ferată, sau la utilaje grele, la care apar șocuri mari.

## 7.2. Calculul arcurilor inelare

În fig. 7.3 este reprezentată o secțiune printr-o pereche de inele, unul exterior și altul interior, care fac parte dintr-un ansamblu de inele ale unui arc. În figură apare și un inel de capăt care servește la montarea arcului.

Sub acțiunea forței $P$, care încarcă în sens axial ansamblul de inele ce formează arcul, inelele se împănează între ele, astfel că în suprafața de contact se naște o presiune $p$, care se consideră a fi uniform repartizată și care produce întinderea inelelor exterioare și comprimarea inelelor interioare.

Aria suprafeței conice se determină cu relația

$$A_m = \pi r_m \frac{h}{\cos\beta}, \tag{7.1}$$

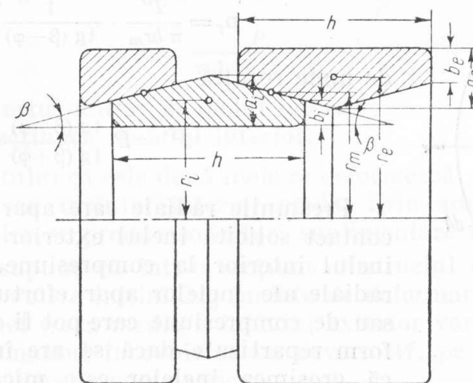



Fig. 7.3

în care:

$r_m$ este raza medie a suprafeței conice;
$h$ — înălțimea inelului;
$\beta$ — unghiul de înclinare al generatoarei suprafeței conice față de axă.

Condiţia de echilibru pentru forţele care lucrează în direcţia axei arcului, notînd coeficientul de frecare $\mu=\mathrm{tg}\,\varphi$, unde $\varphi$ reprezintă unghiul de frecare, este următoarea:

$$P=pA_m(\sin\beta+\mu\cos\beta)=\frac{pA_m\sin(\beta+\varphi)}{\cos\varphi}, \tag{7.2}$$

de unde rezultă valoarea presiunii pe suprafaţa conică:

$$p=\frac{P\cos\varphi}{A_m\sin(\beta+\varphi)}. \tag{7.3}$$

Componenta presiunii $p$ pe suprafaţă în sens radial, care produce compresiunea, respectiv întinderea inelelor interior şi exterior, este dată de relaţia:

$$p_r=\frac{P}{A_m\cos\beta}\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}(\beta+\varphi)}=\frac{P}{\pi h r_m}\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}\,(\beta+\varphi)}. \tag{7.4}$$

În cazul unui arc încărcat cu sarcina $P$, care urmează a fi destins, forţa de destindere $P'$ corespunde aceleiaşi presiuni radiale $p_r$. Ţinînd seamă că la destindere sensul forţelor de frecare este invers, rezultă relaţia:

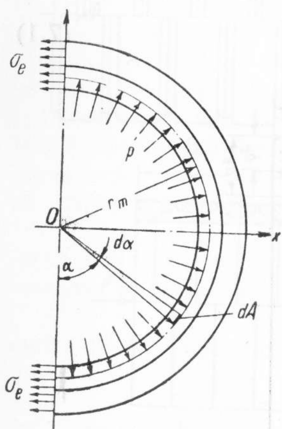


Fig. 7.4

$$p_r=\frac{P'}{\pi\, h r_m}\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}\,(\beta-\varphi)}, \tag{7.5}$$

de unde rezultă

$$P'=P\,\frac{\mathrm{tg}\,(\beta-\varphi)}{\mathrm{tg}\,(\beta+\varphi)}. \tag{7.6}$$

Presiunile radiale care apar în suprafaţa de contact solicită inelul exterior la întindere şi inelul interior la compresiune. În secţiunile radiale ale inelelor apar eforturi de întindere sau de compresiune care pot fi considerate uniform repartizate dacă se are în vedere faptul că grosimea inelelor este mică în raport cu diametrul lor.

Condiţia de echilibru pe direcţia axei $O_x$, pentru jumătate dintr-un inel exterior (fig. 7.4) este următoarea:

$$2\sigma_e\cdot A_e=\int_0^{\pi}dP \tag{7.7}$$

ştiind că

$$dA=hr_m d\alpha \tag{7.8}$$



şi

$$dP=p_r\, hr_m\sin\alpha d\alpha \tag{7.9}$$

rezultă

$$2\sigma_e A_e=\int_0^{\pi}p_r hr_m\sin\alpha d\alpha,$$

de unde

$$\sigma_e=\frac{P}{\pi A_e\,\mathrm{tg}\,(\beta+\varphi)}, \tag{7.10}$$

în care:

- $A_e$ este secţiunea inelului exterior;
- $\sigma_e$ — efortul unitar în inelul exterior;
- $dA$ — proiecţia elementului de arie al suprafeţei de contact laterală, conică, pe un plan perpendicular pe raza respectivă;
- $dP$ — componenta forţei care acţionează pe un element al suprafeţei de contact după direcţia axei $Ox$.

În mod analog pentru inelul interior

$$\sigma_i=\frac{P}{\pi A_i\mathrm{tg}\,(\beta+\varphi)} \tag{7.11}$$

unde: $\sigma_i$ este efortul unitar în inelul interior;
$A_i$ — secţiunea inelului interior.

Datorită faptului că cele două inele se deformează, raza inelului exterior creşte şi raza inelului interior scade. Prin aceste schimbări ale curburilor inelelor se produc solicitări suplimentare de încovoiere.

Dacă se presupune că într-o secţiune din inelul exterior există un moment de încovoiere iniţial $M_0$ înainte de deformare şi că prin întinderea acestui inel (raza medie a inelului exterior variază de la $r_e$ pînă la $r_e+\Delta r_e$), momentul încovoietor va deveni $M$, pe baza relaţiilor de bază de la încovoiere se poate scrie:

$$M_0-M=EI\left[\frac{1}{r_e}-\frac{1}{r_e+\Delta r_e}\right], \tag{7.12}$$

unde: $E$ este modulul de elasticitate al materialului din care este executat inelul:

$I$ — momentul de inerţie al secţiunii inelului în raport cu axa neutră, paralelă cu axa arcului.

Deoarece în situaţia iniţială a inelului nedeformat momentul de încovoiere este nul ($M_0=0$), rezultă

$$M=E\,I\frac{\Delta r_e}{r_e^2}. \tag{7.13}$$

Efortul unitar la încovoiere în fibra extremă, aflată la distanţa $v$ de axa neutră, este dat de relaţia

$$\sigma_{ie}=\frac{Mv}{I}=Ev\,\frac{\Delta r_e}{r_e^2} \tag{7.14}$$

Expresia efortului unitar de încovoiere se poate corela cu expresia alungirii specifice. Conform legii lui Hooke

$$\sigma_e=E\varepsilon. \tag{7.15}$$

În cazul inelului exterior

$$\varepsilon=\frac{2\pi\,(r_e+\Delta r_e)-2\,\pi r_e}{2\pi r_e}=\frac{\Delta r_e}{r_e}. \tag{7.16}$$

Din relaţiile (7.15) şi (7.16) se deduce:

$$\Delta r_e=r_e\varepsilon=r_e\,\frac{\sigma_e}{E}. \tag{7.17}$$

Rezultă că expresia efortului unitar suplimentar, datorit încovoierii, devine

$$\sigma_{ie}=\frac{v}{r_e}\,\sigma_e. \tag{7.18}$$

În mod similar se deduce efortul unitar suplimentar, datorit încovoierii inelului interior, produsă prin deformarea sa

$$\sigma_{ii}=\frac{v}{r_e}\,\sigma_i. \tag{7.19}$$

Deoarece grosimea inelelor este mică în raport cu diametrul lor, raportul $\frac{v}{r}$ este mic, astfel că valoarea eforturilor unitare suplimentare reprezintă aproximativ 5–7% din valoarea efortului unitar de compresiune sau de întindere. În acelaşi timp trebuie menţionat faptul că eforturile unitare suplimentare datorite încovoierii acţionează în sensul măririi solicitării la inelele exterioare şi în sensul scăderii la inelele interioare.

Dat fiind condiţiile de funcţionare diferită a celor două inele, rezistenţa admisibilă recomandată pentru inelele exterioare este mai mică



decît cea recomandată pentru inelele interioare, chiar dacă materialul este acelaşi. Pentru a echilibra rezistenţele efective care se nasc în secţiunile inelelor, acestea se dimensionează astfel că secţiunea inelelor exterioare să fie cu aproximativ 15–30% mai mare decît a inelelor interioare. O altă soluţie constă în a executa inelele din materiale diferite, şi anume materialul pentru inelele exterioare să fie un oţel mai moale.

Dacă pentru variaţia razelor există relaţiile:

$$\Delta r_e=\frac{\sigma_e}{E}\,r_e \tag{7.20}$$

alungirea razei inelului exterior

$$\Delta r_i=\frac{\sigma_i}{E}\,r_i \tag{7.21}$$

(scurtarea razei inelului interior),

rezultă că, la împănarea celor două inele pe o singură suprafaţă de contact, ele intră unul în altul în sens axial cu distanţa

$$f_0=\frac{\sigma_i r_i+\sigma_e r_e}{E\,\mathrm{tg}\,\beta}. \tag{7.22}$$

Pentru un număr de $z$ perechi de inele rezultă săgeata totală a arcului

$$f_{tot}=zf_0=\frac{z}{E}\cdot\frac{\sigma_i r_i+\sigma_e r_e}{\mathrm{tg}\,\beta} \tag{7.23}$$

sau

$$f_{tot}=\frac{z\,P}{\pi E\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,(\beta+\varphi)}\left[\frac{r_i}{A_i}+\frac{r_e}{A_e}\right]. \tag{7.24}$$

Lucrul mecanic înmagazinat prin deformarea arcului este dat de relaţia:

$$L=\frac{P\,f_{tot}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{z\,P^2}{\pi E\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{t}\,;(\beta+\varphi)}\left[\frac{r_i}{A_i}+\frac{r_e}{A_e}\right], \tag{7.25}$$

sau înlocuind se obţine:

$$L=\frac{1}{2}\pi\,\frac{\mathrm{tg}\,(\beta+\varphi)}{\mathrm{tg}\,\beta}\,\frac{\sigma_e^2}{E}\,A_e^2\;z\left[\frac{r_i}{A_i}+\frac{r_e}{A_e}\right]. \tag{7.26}$$

Pentru determinarea coeficientului de utilizare volumetric se pune expresia lucrului mecanic, în funcţie de volum, sub forma:

$$L=\eta\cdot\frac{\sigma_e^2}{E}\;V \tag{7.27}$$

Volumul total al arcului

$$V=2\pi(Z_eA_er_e+Z_iA_ir_i). \qquad (7.28)$$

Făcînd calculul se obține:

$$\eta=\frac{1}{4}\cdot\frac{z}{Z_e}\cdot\frac{\text{tg}\,(\beta+\varphi)}{\text{tg}\,\beta}\cdot\frac{1+\dfrac{r_i}{r_e}\dfrac{A_e}{A_i}}{1+\dfrac{Z_ir_iA_i}{Z_er_eA_e}}, \qquad (7.29)$$

unde $Z_e$ și $Z_i$ reprezintă numărul de inele exterioare, respectiv interioare.

Pentru cazul particular: $Z_e=Z_i=\frac{z}{2}$ și $A_e=A_i$, relația coeficientului de utilizare volumetric devine:

$$\eta=\frac{1}{2}\cdot\frac{\text{tg}\,(\beta+\varphi)}{\text{tg}\,\beta}. \qquad (7.30)$$

Revenind la fig. 7.2, curba $OA$ corespunde perioadei de încărcare. Curba $ABO$, care corespunde perioadei de descărcare, se compune din două părți, și anume porțiunea $AB$ corespunzătoare scăderii sarcinii de la $P$ pînă la $P'$, arcul păstrînd săgeata constantă, și porțiunea $BO$ cînd săgeata și forța scad pînă la zero. Dacă nu ar exista frecare, caracteristica arcului ar fi dată de dreapta $OC$, prin faptul că forțele elastice sînt echilibrate de forțele de frecare, în timp ce încărcarea arcului scade de la $P$ pînă la $P'$. Suprafața cuprinsă în interiorul curbei $OACBO$ reprezintă lucrul mecanic consumat prin frecare.

Deoarece lucrul mecanic corespunzător porțiunilor $OA$ la încărcare și $BO$ la descărcare se determină cu relațiile:

$$L=\frac{1}{2}\,\frac{\text{tg}\,(\beta+\varphi)}{\text{tg}\,\beta}\,\frac{\sigma^2}{E}\,V \text{ și } L'=\frac{1}{2}\,\frac{\text{tg}(\beta-\varphi)}{\text{tg}\,\beta}\,\frac{\sigma^2}{E}\,V, \qquad (7.31)$$

raportul dintre lucrul mecanic consumat prin frecare și lucrul mecanic total este dat de raportul:

$$\frac{Lp}{L}=\frac{L-L'}{L}=1-\frac{L'}{L}=1-\frac{\text{tg}\,(\beta-\varphi)}{\text{tg}\,(\beta+\varphi)}. \qquad (7.32)$$

Pentru valorile uzuale ale lui $\beta$ și $\varphi$, valoarea acestui raport este de aproximativ 0,7, ceea ce înseamnă că aproximativ 70% din lucrul mecanic înmagazinat se consumă în arc prin frecare transformîndu-se în căldură. În diagramă, suprafața $OACBO$ reprezintă deci aproximativ 70% din suprafața $OACDO$.



**Exemplu de calcul.** Să se calculeze un arc- tampon inelar care să preia o forță $P=20\,000$ kgf, amortizînd un lucru mecanic $L=100\,000$ kgf·cm, știind că raza medie a arcului— din motive de spațiu — se fixează la valoarea $r_m=10$ cm (fig. 7.5)

*Rezolvare.* Pentru dimensionarea arcului se aleg: unghiul de înclinație al suprafețelor de contact $\beta=14°$; unghiul de frecare $\varphi=8°$; rezistența admisibilă la compresiune $\sigma_{ac}=13\,000$ kgf/cm²; rezistența admisibilă la tracțiune $\sigma_{at}=10\,000$ kgf/cm²; presiunea admisibilă de contact $p_a=1\,000$ kgf/cm²; lungimea arcului $l=(3{,}3\ldots10)f$; raportul dintre aria secțiunii inelului exterior și aria secțiunii inelului interior $y=\frac{A_e}{A_i}=1{,}3$.

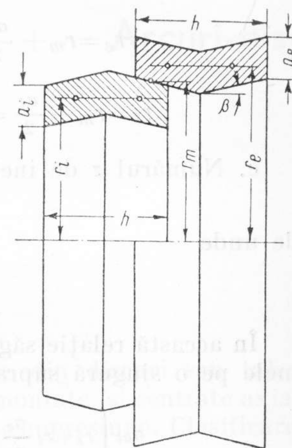


Fig. 7.5

a. Săgeata maximă a arcului:

$$f=\frac{2L}{P}=\frac{2\times100\,000}{20\,000}=10 \text{ cm}.$$

Forța de destindere:

$$P'=P\,\frac{\text{tg}\,(\beta-\varphi)}{\text{tg}\,(\beta+\varphi)}=P\,\frac{\text{tg}\,6°}{\text{tg}\,22°}=0{,}26\ P.$$

b. Aria secțiunii unui inel exterior se determină ținînd seamă că inelul este solicitat la întindere:

$$A_e=\frac{P}{\pi\sigma_{at}\,\text{tg}\,(\beta+\varphi)}=\frac{20\,000}{\pi\times10\,000\ \text{tg}\,22°}=\frac{20\,000}{\pi\times10\,000\times0{,}404}=1{,}57 \text{ cm}^2.$$

Aria secțiunii unui inel interior se determină ținînd seamă că inelul este solicitat la compresiune:

$$A_i=A_e\,\frac{\sigma_{at}}{\sigma_{ac}}=1{,}57\times\frac{10\,000}{13\,000}\text{ cm}^2.$$

c. Grosimea inelului exterior se obține egalînd forța datorită presiunii dintre inele cu forța datorită solicitării la întindere.

$$2r_mhp_a=2a_eh\sigma_{at} \text{ sau } a_e=r_m\,\frac{p_a}{\sigma_{at}}=10\times\frac{1\,000}{10\,000}.$$

Grosimea inelului interior:

$$y=\frac{A_e}{A_i}=\frac{a_e}{a_i} \text{ sau } a_i=\frac{a_e}{\dfrac{A_e}{A_i}}=\frac{1}{1{,}3}\times10=7{,}7 \text{ mm}.$$

Înălţimea unui inel:

$$h=\frac{A_e}{a_e}=\frac{1,57}{1}=1,57 \text{ cm}=15,7 \text{ mm}.$$

d. Pentru razele care trec prin centrele de greutate ale secţiunilor inelelor rezultă valorile:

$$r_e=r_m+\frac{a_e}{2}=10+\frac{1}{2}=10,5 \text{ cm}=105 \text{ mm};$$

$$r_i=r_m-\frac{a_i}{2}=10-\frac{0,77}{2}=9,615 \text{ cm}=96,15 \text{ mm}.$$

e. Numărul $z$ de inele se deduce din relaţia săgeţii totale

$$f=f_0(z-1),$$

de unde

$$z=\frac{f}{f_0}+1.$$

În această relaţie săgeata corespunzătoare alunecării unei perechi de inele pe o singură suprafaţă de contact este următoarea

$$f_0=\frac{\sigma_{at}\left(r_e+r_i\frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right)}{E \text{ tg } \beta}=\frac{10\,000\,(10,5+9,615\times 1,3)}{2,1\times 10^6\cdot \text{tg } 14^\circ}=0,441 \text{ cm}.$$

Rezultă $z=\frac{10}{0,441}+1=24,2$ inele; se iau 24 de inele.

Lungimea arcului:

$$l=0,5hz+f=0,5\times 15,7\times 24+10=198 \text{ mm}.$$

# 8

# Arcuri-disc

## 8.1. Generalităţi

Arcurile-disc sînt sisteme elastice compuse din discuri sau talere inelare în formă de rondele tronconice din oţel montate şi centrate axial, astfel încît ansamblul lor să formeze un arc de compresiune. Clasificarea arcurilor-disc este dată în STAS 6916-64.

În afara clasificării date de STAS 6916-64, se pot construi arcuri-disc cu secţiune variabilă, formate din discuri inelare, a căror grosime variază în lungul razei astfel că secţiunea lor transversală are forma unei pene trapezoidale. Pentru a realiza un element elastic (fig. 8.1) se foloseşte ansamblul de discuri de secţiune variabilă *2*, distanţate între ele prin bucşele de distanţare şi de sprijin *1* şi prinse prin inelele de legătură *3*. Mărimea săgeţii maxime este determinată de lungimea bucşelor de distanţare care au prevăzute la capete locaşuri de sprijin de formă tronconică, astfel încît la atingerea săgeţii maxime bucşele se sprijină unele pe altele, întreg ansamblul devenind un corp solid rigid.

Arcurile-disc au început a fi folosite în construcţia de maşini abia în ultimul secol şi pentru că ele erau la început folosite în producţia de armament, metoda de calcul al lor a devenit cunoscută mai tîrziu. În prezent, utilizarea lor, s-a extins în construcţia de maşini mai ales cu scopul de a înlocui arcurile elicoidale pentru compresiune, cînd se cere un arc mai rigid corespunzător unor sarcini mari şi unor săgeţi mici sau pentru amortizarea şocurilor. Se întîlnesc astfel de elemente elastice la utilajele de stanţare, la tampoanele pentru amortizarea şocurilor

mari la materialul rulant sau ca elemente de susţinere şi ancorare elastică în cazul construcţiilor mari, la care apar dilatări în timpul funcţionării utilajelor (cuptoare metalurgice etc.).

În general, elementele elastice formate din discuri cu secţiune constantă sau cu secţiune variabilă prezintă o serie de avantaje care sînt

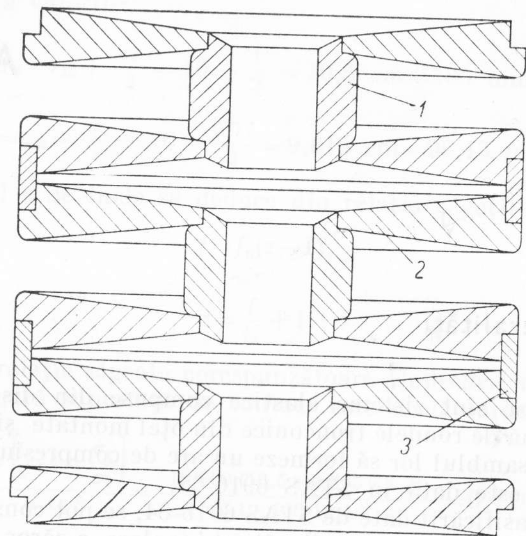



Fig. 8.1

uneori determinante în alegerea lor ca soluţie constructivă care să înlocuiască arcurile elicoidale.

Astfel, aceste arcuri: suportă sarcini mari şi pot înmagazina lucru mecanic mare, la săgeţi relativ mici; au un coeficient de utilizare volumetrică foarte bun; au o caracteristică liniară relativ identică la încărcare şi la descărcare; diferenţa între caracteristica de încărcare şi cea de descărcare este în general mică şi apare în cazul discurilor suprapuse datorită frecării între talere; rigiditatea şi caracteristica elementului elastic pot fi modificate prin gruparea convenabilă a dimensiunilor discurilor sau a numărului de rondele utilizate; mărimea săgeţii totale a arcului poate fi realizată convenabil prin alegerea unui număr corespunzător de discuri; în caz de rupere a unui disc, elementul elastic se reface prin înlocuirea discului respectiv fără a fi nevoie să se renunţe la tot elementul elastic, cum se întîmplă în cazul arcului elicoidal;



în general, pericolul de rupere a discurilor este înlăturat datorită faptului că săgeţile sînt limitate fie prin aplatizarea discurilor, fie prin contactul bucşelor de distanţare la discurile cu secţiune variabilă.

## 8.2. Elemente de calcul pentru discuri de grosime constantă

Calculul de proiectare al arcurilor-disc (fig. 8.2) este în general foarte complex.

Pentru stabilirea eforturilor unitare în discuri şi a deformaţiilor acestora se fac unele ipoteze simplificatoare. În primul rînd se asimilează rondela cu o placă inelară plană neglijîndu-se forma sa conică reală.

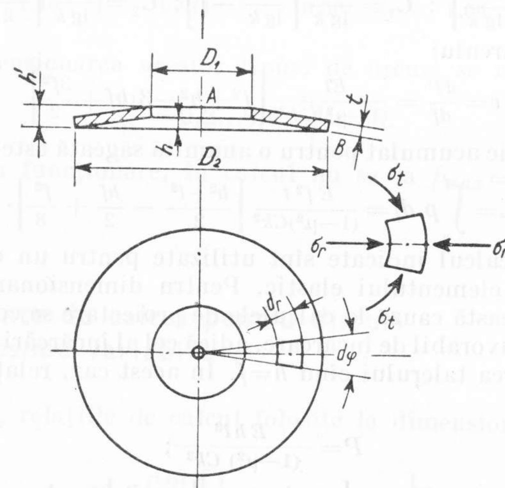



Fig. 8.2

În al doilea rînd, calculele de dimensionare se fac pe baza valorii maxime a eforturilor tangenţiale, care apar la bordura interioară a talerului neglijîndu-se eforturile radiale, care de altfel sînt foarte mici.

Pentru calculul de proiectare se folosesc următoarele relaţii:

$$P=\frac{Ef}{(1-\mu^2)Ck^2}\left[\left(h-f\right)\left(h-\frac{f}{2}\right)t+t^3\right]; \tag{8.1}$$

$$\sigma_{max}=\frac{Ef}{(1-\mu^2)Ck^2}\left[C_1\left(h-\frac{f}{2}\right)+C_2t\right], \tag{8.2}$$

în care:

$f$ este săgeata pentru un taler;
$h$ — înălțimea discului în stare liberă; $f_{max}=h$;
$P$ — sarcina;
$E$ — modulul de elasticitate;
$t$ — grosimea discului;
$\mu$ — coeficientul lui Poisson;

$k$ — raportul de formă al discului; $k=\frac{D_2}{D_1}$

unde:

$D_1$ este diametrul interior
$D_2$ — diametrul exterior.

$$C=\frac{6}{\lg k}\left[\frac{k-1}{\lg k}\right]^2;\ C_1=\frac{6}{\lg k}\left[\frac{k-1}{\lg k}-1\right];\ C_2=\frac{6}{\lg k}\left[\frac{k-1}{2}\right] \tag{8.3}$$

Rigiditatea arcului

$$c=\frac{dP}{df}=\frac{Et}{(1-\mu^2)Ck^2}\left[t^2+h^2-3\,hf+\frac{3f^2}{2}\right]. \tag{8.4}$$

Lucrul mecanic acumulat pentru o anumită săgeată este dat de relația:

$$L=\int_0^f p\,df=\frac{Ef^2t}{(1-\mu^2)Ck^2}\left[\frac{h^2+t^2}{2}-\frac{hf}{2}+\frac{f^2}{8}\right]. \tag{8.5}$$

Relațiile de calcul indicate sînt utilizate pentru un calcul de verificare precisă a elementului elastic. Pentru dimensionare acestea sînt dificile și din această cauză la calculele de proiectare se consideră inițial cazul cel mai defavorabil de încărcare, adică cel al încărcării la maximum pînă la aplatizarea talerului cînd $h=f$. În acest caz, relațiile de dimensionare sînt:

$$P=\frac{Eht^3}{(1-\mu^2)\,Ck^2}; \tag{8.6}$$

$$\sigma_{max}=\frac{Eh}{(1-\mu^2)\,Ck^2}\left[C_1\frac{h}{2}+C_2t\right]=\frac{P}{t^3}\left[C_1\frac{h}{2}+C_2t\right]. \tag{8.7}$$

Deoarece și aceste relații necesită încercări repetate pînă la stabilirea dimensiunilor corespunzătoare, se pot utiliza relațiile aproximative stabilite de prof. Max Essling în „Dinglers polytechnisches Journal“, Berlin, 1903:

$$P=\frac{\sigma t^2}{1{,}24\,\psi_1}; \tag{8.8}$$

$$f=\frac{0{,}112\,\psi_2 D_2^2\sigma}{tE} \tag{8.9}$$



Aceste relații sînt valabile numai pentru eforturi unitare sub $\sigma_t=15\,000$ kgf/cm² și pentru porțiunea din caracteristică ce se păstrează aproximativ liniară. Valorile coeficienților $\psi_1$ și $\psi_2$ sînt dați în tabela 8.1 în funcție de raportul $\frac{D_1}{D_2}=\frac{1}{k}$.

*Tabela 8.1*

**Valorile coeficienților de calcul $\psi_1$ și $\psi_2$**

| $\frac{D_1}{D_2}$ | $\psi_1$ | $\psi_2$ | $\frac{D_1}{D_2}$ | $\psi_1$ | $\psi_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,20 | 1,81 | 0,704 | 0,35 | 1,33 | 0,999 |
| 0,25 | 1,61 | 0,816 | 0,40 | 1,23 | 1,062 |
| | | | 0,45 | 1,14 | 1,117 |
| 0,30 | 1,46 | 0,911 | 0,50 | 1,06 | 1,151 |

Pentru dimensionarea acestor tipuri de arcuri se recomandă:

$$\frac{D_1}{D_2}=0{,}2\ldots0{,}6;\ \frac{D_2}{t}\leqslant35.$$

Pentru buna funcționare, în calcul nu se ia $f_{max}=h$, ci se alege $\frac{h}{f_{max}}\approx\frac{4}{3}$.

## 8.3. Elemente de calcul pentru discuri de grosime variabilă

În acest caz, relațiile de calcul folosite la dimensionarea discurilor sînt:

$$f=\frac{PD_2^2}{4Et_1^3}\left[\frac{1}{28}(5-k)^2+0{,}04\right]; \tag{8.10}$$

$$\sigma=\frac{P}{t_1^2}\left[\frac{1}{44}(5-k)^2+0{,}3\right], \tag{8.11}$$

în care:

$\sigma$ este efortul unitar maxim în disc;
$t_1$ — grosimea discului pe conturul interior;
$t_2$ — grosimea discului pe conturul exterior.

Aceste relații sînt valabile pentru valori ale lui $k$ cuprinse între 1,5 și 5.

Relațiile (8.10) și (8.11) se mai pot scrie și sub forma:

$$f=\frac{PD_1^2k^3}{4Et_2^3}\left[\frac{1}{28}(5-k)^2+0,04\right]; \tag{8.12}$$

$$\sigma=\frac{Pk^2}{t_2^2}\left[\frac{1}{44}(5-k)^2+0,3\right]. \tag{8.13}$$

Din (8.12) se deduce expresia forței capabile:

$$P=\frac{4fEt_2^3}{k^3D_1^2\left[\frac{1}{28}(5-k)^2+0,04\right]}, \tag{8.14}$$

sau în funcție de efortul unitar $\sigma$,

$$P=\frac{\sigma t_2^2}{k^2\left[\frac{1}{44}(5-k)^2+0,3\right]}, \tag{8.15}$$

## 8.4. Indicații tehnologice

Atît pentru arcurile disc cu secțiune constantă, cît și pentru cele cu secțiune variabilă se utilizează oțeluri de arc de cea mai bună calitate. Pentru discurile cu secțiune constantă se folosesc benzi din oțel, care, pentru asigurarea unei grosimi cît mai uniforme, se rectifică pe ambele fețe. Prin ștanțare se taie din benzi discuri de dimensiuni acoperitoare, adică discuri cu diametrul exterior mai mare și diametrul interior mai mic. Pentru a înlătura eforturile unitare remanente sau fisurile care apar datorită procesului de ștanțare, discul se strunjește și se alezează la dimensiunile sale. Deoarece la bordura interioară aceste eforturi unitare remanente sau fisuri provocate de procesul de ștanțare sînt periculoase, pentru arcuri mai pretențioase se înlocuiește ștanțarea găurii centrale printr-o operație de găurire. Forma conică a talerului se realizează prin presare la rece dacă grosimea sa este sub 4 mm sau la cald dacă grosimea este mai mare. Înainte de montarea discurilor se recomandă rotunjirea muchiilor talerelor mai ales la bordura exterioară. Montarea discurilor pe axul central este însoțită de cîteva încărcări la maximum, pînă la aplatizarea lor astfel ca unghiul de înclinare a generatoarei suprafeței conice să primească mărimea sa nominală înainte de aplicarea tratamentului termic.

Tratamentul termic trebuie aplicat cu deosebită grijă pentru a se asigura o uniformitate de proces pentru toate talerele pe toate suprafe-



țele. Se aplică un tratament de călire urmat de o revenire, astfel ca să se obțină o duritate RC de 45–52 HRC.

Tija centrală de ghidare se execută prin strunjire din OLC45 STAS 880-60 sau din OL60 STAS 500-63 și se tratează termic la duritatea 40 HRC.

Discurile cu secțiune variabilă se execută din oțel de arc de cea mai bună calitate, STAS 795-62. Bucșele de distanțare se execută din OL60, STAS 500-63 prin strunjire și se tratează termic, iar inelele de legătură se execută din oțel de arc de aceeași calitate ca și discurile, acestea fiind tăiate asemănător segmenților de piston. Ele se montează la fel ca și segmenții.

**Exemplu de calcul.** Să se dimensioneze un arc-disc, care să suporte o sarcină de 800 kgf și să dea pentru întregul arc o săgeată de aproximativ 22 mm. Diametrul interior al discului necesar a fi prevăzut pentru bolțul de ghidare și centrare a discurilor trebuie să fie $D_1=$ $=24$ mm.

*Rezolvare.* Se alege $\sigma_a=15\ 000$ kgf/cm² și raportul diametrelor $\frac{D_1}{D_2}=0,35$.

Rezultă diametrul exterior al unui disc

$$D_2=\frac{D_1}{0,35}=\frac{24}{0,35}=68,5\ \text{mm}.$$

Se ia $D_2=68$ mm.

Folosind tabela 8.1 se determină coeficienții $\psi_1$ și $\psi_2$:

$$\psi_1=1,33 \text{ și } \psi_2=0,999.$$

Grosimea discului:

$$t=\sqrt{\frac{1,24\psi_1P}{\sigma_a}}=\sqrt{\frac{1,24\times1,33\times800}{150}}=2,7\ \text{mm}.$$

Se ia $t=3$ mm.

Săgeata corespunzătoare unui disc simplu:

$$f=\frac{0,112D_2^2\sigma_a\psi_2}{tE}=\frac{0,112\times68^2\times150\times0,99}{3\times2,1\times10^4}=1,2\ \text{mm}.$$

Rezultă că pentru a obține o săgeată totală de 22 mm este necesar ca întreg arcul să fie format din 10 grupe de două discuri simple.

# 9

# Arcuri termobimetalice

## 9.1. Generalități

Arcurile termobimetalice sînt executate din două lamele metalice din materiale diferite, îmbinate între ele prin sudură sau prin lipire, formînd astfel o singură lamelă care, datorită diferenței de dilatare dintre cele două lamele componente produce o deformare a lamelei rezultate, care are mare asemănare cu alura deformării la încovoiere. Stratul (lamela) cu un coeficient de dilatare mare se numește *strat activ*, iar cel cu coeficient de dilatare mic se numește *strat inert*.

Cea mai simplă formă de arc termobimetalic este aceea a unei lamele din două straturi, încastrată la un capăt. Sensibilitatea acestor arcuri

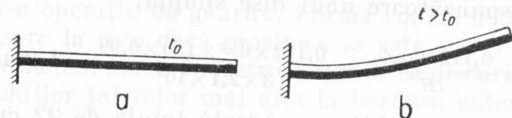


Fig. 9.1

este dependentă de mărimea săgeții care apare în capătul liber al lamelei care, la rîndul ei, depinde de lungimea lamelei bimetalice. Pentru a obține elemente elastice cu sensibilitate cît mai mare și totodată cu



un gabarit cît mai redus se dă arcului termobimetalic forma spirală sau elicoidală.

În fig. 9.1 este reprezentată schema unui arc termobimetalic în forma unei lamele din două straturi, încastrată la un capăt, în stare nedeformată (fig. 9.1, *a*) și în stare deformată (fig. 9.1, *b*).

Arcurile termobimetalice sînt utilizate în mod deosebit în construcția aparatelor de măsură, în construcția releelor, în construcția regulatoarelor de temperatură și în construcția anumitor mecanisme și dispozitive de comandă. Utilizarea arcurilor termobimetalice este propice atît în cazurile în care se măsoară temperatura, cît și în cazurile în care alți parametri care trebuie măsurați se pot transforma sau sînt

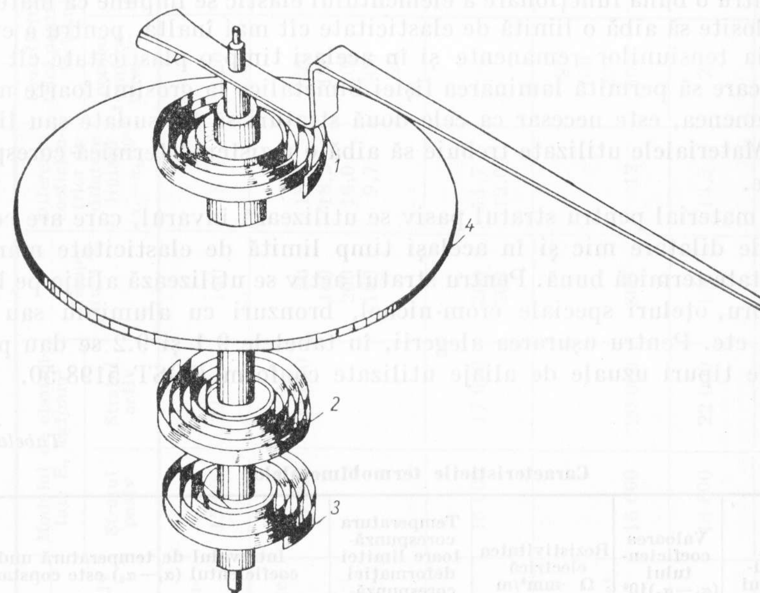


Fig. 9.2

în corelație cu temperatura. Ca exemplu de astfel de utilizări se poate da folosirea elementelor elastice bimetalice în construcția aparatelor pentru măsurarea intensității și puterii curentului, ampermetre și wattmetre bimetalice. În fig. 9.2 este reprezentat schematic sistemul de

măsurare al unui ampermetru bimetalic. În această schemă spirala bimetalică 1 este încălzită de curentul electric și acționează asupra acului indicator, arcul spiral bimetalic *3* prin care nu trece curentul are rolul de a introduce corelația de măsură în funcție de temperatura mediului ambiant, iar arcul spiral *2* are o funcție pur mecanică, de a asigura contactul electric în capătul mobil al spiralei bimetalice *1*. Ecranul 4 are rolul de a despărți și proteja elementele elastice *2* și *3* de căldura degajată de elementul elastic bimetalic. *1*. Materialele din care se execută straturile arcului termobimetalic trebuie să aibă coeficienți de dilatare liniară foarte diferiți între ei, dar constanți față de variația temperaturii. Cu cît diferența între coeficienți este mai mare, cu atît sensibilitatea aparatului este mai mare.

Pentru o bună funcționare a elementului elastic se impune ca materialele folosite să aibă o limită de elasticitate cît mai înaltă, pentru a evita apariția tensiunilor remanente și în același timp o plasticitate cît mai mare, care să permită laminarea fîșiei bimetalice la grosimi foarte mici. De asemenea, este necesar ca cele două straturi să fie sudate sau lipite bine. Materialele utilizate trebuie să aibă o rezistență termică corespunzătoare.

Ca material pentru stratul pasiv se utilizează invarul, care are coeficient de dilatare mic și în același timp limită de elasticitate mare și stabilitate termică bună. Pentru stratul activ se utilizează aliaje pe bază de cupru, oțeluri speciale crom-nichel, bronzuri cu aluminiu sau cu beriliu etc. Pentru ușurarea alegerii, în tabelele 9.1 și 9.2 se dau principalele tipuri uzuale de aliaje utilizate conform GOST 5198-50.

*Tabela 9.1*

**Caracteristicile termobimetalelor**

| Marca termobimetalului | Valoarea coeficientului $(\alpha_1-\alpha_2)10^6$ | Rezistivitatea electrică $\Omega\cdot mm^2/m$ | Temperatura corespunzătoare limitei deformației corespunzătoare, °C | Intervalul de temperatură unde coeficientul $(\alpha_1-\alpha_2)$ este constant |
|---|---|---|---|---|
| ТБ-1 | 21 | 0,58—0,68 | 530—550 | De la —60 pînă la +(190—210) |
| ТБ-2 | 8 | 0,56—0,64 | 430—450 | De la —50 pînă la +(320—340) |
| ТБ-3 | 20 | 0,75—0,83 | 450—470 | De la —50 pînă la +(190—210) |
| ТБ-4 | 12 | 0,14—0,20 | 410—430 | De la —60 pînă la +(190—210) |
| ТБ-5 | 19 | 0,08—0,14 | 180—200 | De la —50 pînă la +(180—210) |
| ТБ-6 | 19,5 | 0,14—0,20 | 230—250 | De la —50 pînă la +(190—210) |
| ТБ-7 | 18,0 | 0,14—0.18 | 290—310 | De la —50 pînă la +(210—230) |



*Tabela 9.2*

**Caracteristicile termobimetalelor**

| Materiale de bază | | Modulul de elasticitate E, kgf/mm² | | Temperatura °C | Diferența coeficienților de dilatare liniară $(\alpha_1-\alpha_2)10^6$ | Rezistivitatea electrică pentru raportul secțiunii 1:1 | | Intervalul temperaturilor de lucru, °C | Temperatura maximă, °C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Stratul pasiv | Stratul activ | Stratul pasiv | Stratul activ | | | pentru temperatura, °C | ρ, Ω·mm²/m | | |
| Invar H 36 | Oțel crom-nichel | 15 000 | 22 000 | 100 | 18 | 20 | 0,79 | De la —60 pînă la +200 | 225 |
| Invar H 36 | Oțel nichel-moliben | 15 000 | 20 000 | 50<br>100<br>200<br>100 | 18,2<br>18,2<br>16,0<br>9,7 | 20<br>100<br>200<br>305<br>20 | 0,79<br>0,83<br>0,86<br>0,96<br>0,54 | De la —60 pînă la +200 | 225 |
| Platinit H 42 | Metal-monel | 16 000 | 17 600 | 200<br>300 | 11,7<br>12,6 | — | — | De la —60 pînă la +315 | 325 |
| Platinit H 42 | Oțel nichel molibden | 16 600 | 20 000 | 300 | 12 | 20<br>100<br>200<br>300 | 0,68<br>0,70<br>0,73<br>0,82 | De la —60 pînă la +375 | 400 |
| Platinit H 42 | Oțel crom-nichel | 16 600 | 22 000 | 100 | 13,5 | 20 | 0,6 | De la —60 pînă la +185 | 200 |
| Invar H 36 | Alamă Л 68 | 15 000 | 11 500 | 100<br>150<br>200 | 18,7<br>18,5<br>18,2 | 20 | 0,159 | De la — pînă la + | 200 |

*Tabela 9.2* (continuare)

| Materiale de bază: Stratul pasiv | Materiale de bază: Stratul activ | Modul de elasticitate E. kgf/mm²: Stratul pasiv | Modul de elasticitate E. kgf/mm²: Stratul activ | Temperatura °C | Diferenţa coeficienţilor de dilatare liniară $(\alpha_1-\alpha_2)10^6$ | Rezistvitatea electrică pentru raportul secţiunii 1:1: Pentru temperatura, °C | Rezistvitatea electrică pentru raportul secţiunii 1:1: ρ, Ω·mm²/m | Intervalul temperaturilor de lucru °C | Temperatura maximă °C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Invar H 36 | Alamă Л 62 | 15 000 | 10 700 | 100<br>200 | 19,1<br>17,8 | 20 | 0,16 | De la — pînă la + | 200 |
| Invar H 36 | Alamă ЛЖН 60—1,5—1,0 | 15 000 | 10 600 | 100 | 19,7 | 20 | 0,18 | De la — pînă la + | 200 |
| Invar H 36 | Alamă ЛОС 60—0,7—0,2 | 15 000 | 11 000 | 100<br>150 | 19,9<br>19,8 | 20 | 0,16 | De la — pînă la + | 200 |
| Invar H 36 | Alamă ЛМЦ 58—2 | 15 000 | 10 500 | 100 | 19,7 | 20 | 0,17 | De la — pînă la + | 200 |
| Invar H 36 | Bronz cu aluminiu Бр. А 5 | 15 000 | 13 400 | 100 | 14,1 | 20 | 0,29 | De la — pînă la + | 200 |
| Invar H 36 | Bronz cu beriliu Бр. Б 2 | 15 000 | 12 500 | 150<br>200 | 15,1<br>14,5 | 20 | 0,157 | De la — pînă la + | 225 |



## 9.2. Elemente de calcul

Un arc termobimetalic se deformează şi este supus la solicitări fie datorită încălzirii sale, fie datorită acţiunii unor forţe exterioare. Eforturile unitare, care se nasc în secţiunea lamelei şi deformările totale în cazul solicitării simultane sub efectul termic şi cel al forţelor exterioare, se determină prin însumarea valorilor determinate pentru fiecare efect luat în parte.

### 9.2.1. Relaţii de calcul pentru elementul elastic, bimetalic sub efectul încălzirii

Pentru stabilirea relaţiilor de calcul se poate lua în consideraţie un element din lama arcului, izolat prin două secţiuni transversale, supus numai efectului temperaturii (fig. 9.3).

Dacă temperatura elementului variază cu valoarea $t$, elementul de arc termobimetalic se încovoaie astfel că secţiunile transversale rămîn plane, dar se rotesc una faţă de alta cu un unghi $d\theta$, datorită faptului că fibrele din stratul activ se lungesc mai mult decît cele din stratul pasiv. În acelaşi timp, deoarece în stratul de lipire, alungirea (deforma-

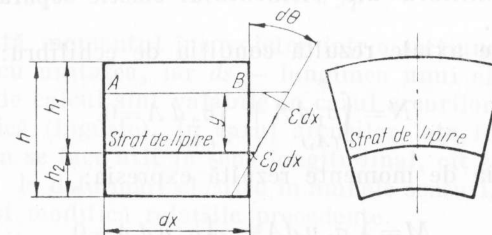



Fig. 9.3

rea) fibrelor din cele două straturi trebuie să fie aceeaşi, în fibrele celor două straturi apar şi deformări elastice. Deformarea totală $\varepsilon$ a unei fibre $AB$ aflată la distanţa $y$ de stratul de lipire rezultă din însumarea algebrică a deformării termice $\varepsilon_t$ şi a deformării elastice $\varepsilon_y$:

$$\varepsilon = \varepsilon_t + \varepsilon_y. \tag{9.1}$$

Observînd că în stratul de lipire apare o deformare procentuală $\varepsilon_0$, alungirea relativă totală a fibrei $AB$ aflată la distanța $y$ de stratul de lipire este dată de relația:

$$\varepsilon=\varepsilon_0+y\frac{d\theta}{dx}, \tag{9.2}$$

unde: $\frac{d\theta}{dx}=\frac{1}{\rho}$ reprezintă variația curburii.

Ținînd seamă că deformarea termică $\varepsilon_t$ este dată de relația $\varepsilon_t=\alpha t$ rezultă pentru deformarea elastică $\varepsilon_y$ a fibrei relația:

$$\varepsilon_y=\varepsilon_0+y\frac{d\theta}{dx}-\alpha t. \tag{9.3}$$

Eforturile unitare pe baza legii lui Hooke au expresiile

$$\sigma=E\left(\varepsilon_0+y\frac{d\theta}{dx}-\alpha t\right), \tag{9.4}$$

respectiv: $\sigma_1=E_1\left(\varepsilon_0+y\frac{d\theta}{dx}-\alpha_1 t\right)$ pentru $(0\leqslant y\leqslant h_1)$ (9.4, *a*)

și $\sigma_2=E_2\left(\varepsilon_0+y\frac{d\theta}{dx}-\alpha_2 t\right)$ pentru $(-h_2\leqslant y\leqslant 0)$. (9.4, *b*)

În aceste relații $\varepsilon_0$ și $\frac{d\theta}{dx}$ sînt necunoscute și se pot determina din condițiile de echilibru ale elementului elastic separat, supus numai acțiunii termice.

Pentru forțele axiale rezultă condiția de echilibru:

$$N=\int_{(A_1)}\sigma_1\,dA+\int_{(A_2)}\sigma_2\,dA=0. \tag{9.5}$$

Pentru ecuația de momente rezultă expresia:

$$M=\int_{(A_1)}\sigma_1\,y\,dA+\int_{(A_2)}\sigma_2\,y\,dA=0. \tag{9.6}$$

Înlocuind relațiile indicate anterior pentru $\sigma_1$ și $\sigma_2$, și integrînd se obține:

$$\left.\begin{aligned}&E_1h_1\left(\varepsilon_0+\frac{h_1d\theta}{2dx}-\alpha_1 t\right)-E_2h_2\left(-\varepsilon_0+\frac{h_2}{2}\cdot\frac{d\theta}{dx}+\alpha_2 t\right)=0;\\&E_1h_1^2\left(\varepsilon_0+\frac{2}{3}h_1\frac{d\theta}{dx}-\alpha_1 t\right)-E_2h_2^2\left(\varepsilon_0-\frac{2}{3}h_2\frac{d\theta}{dx}-\alpha_2 t\right)=0.\end{aligned}\right\} \tag{9.7}$$



Din aceste relații rezultă:

$$\frac{d\theta}{dx}=\frac{6(\alpha_1-\alpha_2)t}{\frac{(E_1h_1^2-E_2h_2^2)^2}{E_1E_2h_1h_2(h_1+h_2)}+4(h_1+h_2)} \tag{9.8}$$

Pentru o sensibilitate maximă este necesar ca această expresie să fie maximă. Această condiție este dată de relația:

$$E_1h_1^2=E_2h_2^2 \quad \text{sau} \quad \frac{h_1}{h_2}=\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}. \tag{9.9}$$

Elementul elastic care satisface condiția aceasta se numește arc termobimetalic *normal*.

Din relațiile (9.8) și (9.9), notînd $h=h_1+h_2$, rezultă relația variației curburii:

$$\frac{d\theta}{dx}=\frac{3}{2}(\alpha_1-\alpha_2)\frac{t}{h}. \tag{9.10}$$

Expresia lui $\varepsilon_0$ devine în acest caz:

$$\varepsilon_0=(\alpha_1h_2+\alpha_2h_1)\frac{t}{h}. \tag{9.11}$$

Pentru determinarea deplasării (săgeții) capătului arcului termobimetalic se folosește relația:

$$f=\int_l\frac{d\theta}{dx}M_1ds=\frac{3}{2}(\alpha_1-\alpha_2)\frac{t}{h}\int_l M_1ds, \tag{9.12}$$

unde: $M_1$ reprezintă momentul încovoietor într-o secțiune a barei creat de o forță egală cu unitatea, iar $ds$ — lungimea unui element de arc.

Aceste relații de calcul sînt valabile în cazul arcurilor termobimetalice de lățime mică (înguste). În cazul arcurilor late trebuie avut în vedere că dilatarea se face atît în sens longitudinal, cît și în sens lateral, ceea ce duce la deformări elastice în ambele sensuri, care se influențează reciproc și modifică relațiile precedente.

Relația eforturilor unitare în fibra aflată la distanța $y$ de stratul de lipit se obține pornind de la relațiile deformațiilor:

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_1=E_1\left(\varepsilon_0+y\frac{d\theta}{dx}-\alpha_1 t\right)=E_1\frac{t}{h}(\alpha_1-\alpha_2)\left(\frac{3}{2}y-h_1\right),\\&\text{unde } 0\leqslant y\leqslant h_1;\\&\sigma_2=E_2\left(\varepsilon_0+y\frac{d\theta}{dx}-\alpha_2 t\right)=E_2\frac{t}{h}(\alpha_1-\alpha_2)\left(\frac{3}{2}y+h_2\right),\\&\text{unde } -h_2\leqslant y\leqslant 0.\end{aligned}\right\} \tag{9.13}$$

Valorile maxime ale efortului unitar se află în dreptul stratului lipiturii ($y=0$).

Eforturile unitare se anulează pentru $y=\frac{2}{3}h_1$, respectiv $y=-\frac{2}{3}h_2$.

Eforturile unitare maxime sînt date de relaţiile:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{1\ max}&=-E_1(\alpha_1-\alpha_2)t\frac{h_1}{h}\\ \sigma_{2\ max}&=E_2(\alpha_1-\alpha_2)t\frac{h_2}{h}\end{aligned}\right\} \qquad (9.14)$$

În fig. 9.4 este reprezentată diagrama variaţiei deformaţiilor (deformaţia totală, deformaţia datorită încălzirii, deformaţia elastică şi variaţia eforturilor unitare).

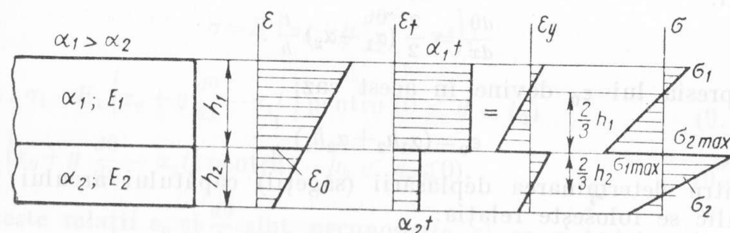



Fig. 9.4

## 9.2.2. Solicitarea la încovoiere a arcului bimetalic sub acţiunea forţelor exterioare

Pentru stabilirea relaţiilor de calcul se ia în considerare un element de lamă a arcului izolat solicitat de momentele exterioare $M$, în condiţiile unei temperaturi constante. Sub acţiunea momentelor încovoietoare, secţiunile din capetele elementului se rotesc realizînd între ele un unghi $d\theta$, ca în fig. 9.5, secţiunile rămînînd plane.

Fibrele elementului astfel izolat se lungesc în stratul activ şi o parte din stratul inert, şi se scurtează într-o parte a stratului inert. În acest fel, fibra neutră a cărei lungime rămîne neschimbată se află sub stratul de lipire în stratul inert, la distanţa $e$.

Deformarea relativă a unei fibre $AB$ aflată la distanţa $y$ de stratul de lipire este

$$\varepsilon=\frac{y+e}{\rho}=(y+e)\frac{d\theta}{dx}. \qquad (9.15)$$



Pe baza legii lui Hooke, relaţiile eforturilor unitare sînt următoarele:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1&=E_1(y+e)\frac{d\theta}{dx}\ \text{pentru}\ (0\leqslant y\leqslant h_1)\\ \sigma_2&=E_2(y+e)\frac{d\theta}{dx}\ \text{pentru}(-h_2\leqslant y\leqslant 0).\end{aligned}\right\} \qquad (9.16)$$

Din condiţia de echilibru a unei feţe a elementului elastic, notînd cu $b$ lăţimea lamelei, rezultă:

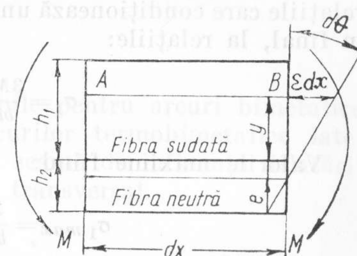



Fig. 9.5

$$\left.\begin{aligned}N&=\int_0^{h_1}\sigma_1 dA+\int_{-h_2}^{0}\sigma_2 dA=0\\ M&=b\left[\int_0^{h_1}\sigma_1 y dy+\int_{-h_2}^{0}\sigma_2 y dy\right].\end{aligned}\right\} \qquad (9.17)$$

Din aceste relaţii rezultă:

$$E_1(h_1^2+2\,eh_1)+E_2(-h_2^2+2\,eh_2)=0 \qquad (9.18)$$

sau

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{h_2^2-2eh_2}{h_1^2+2eh_1}. \qquad (9.18,\ a)$$

Ţinînd seamă de condiţia care a rezultat din solicitarea la încălzire pentru a avea un element elastic termobimetalic normal, rezultă că $e=0$.

Momentul $M$ se determină cu relaţia:

$$M=\frac{b}{3}\frac{d\theta}{dx}(E_1h_1^3+E_2h_2^3) \qquad (9.19)$$

sau

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\theta}{dx}=\frac{3M}{b}\cdot\frac{1}{E_1h_1^3+E_2h_2^3}. \qquad (9.19,\ a)$$

Considerînd un arc-lamă de secţiune dreptunghiulară echivalent cu arcul termobimetalic, acţionat de acelaşi moment $M$, pentru a se obţine aceeaşi rază de curbură va trebui ca:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}=\frac{M}{E\dfrac{bh^3}{12}}=\frac{3M}{b}\cdot\frac{1}{E_1h_1^3+E_2h_2^3}. \qquad (9.20)$$

Astfel se poate determina cu $E$ echivalent pentru cazul cînd se raportează calculul arcului bimetalic la calculul unei lamele metalice alcătuite din același material:

$$E_{ech}=\frac{4}{h^3}(E_1h_1^3+E_2h_2^3)=\frac{4E_1E_2}{(\sqrt{E_2}+\sqrt{E_1})^2}. \qquad (9.21)$$

Ținînd seamă de relațiile eforturilor $\sigma_1$ și $\sigma_2$ amintite, precum și de relațiile care condiționează un element termobimetalic normal, se ajunge, în final, la relațiile:

$$\sigma_1=\frac{3M\cdot y}{bh_1^2h}\ ;\quad \sigma_2=\frac{3M\cdot y}{bh_2^2h}, \qquad (9.22)$$

Valorile maxime fiind:

$$\sigma_{1\,max}=\frac{3M}{bhh_1}\ ;\quad \sigma_{2\,max}=\frac{-3M}{bhh_2}\ ; \qquad (9.23)$$

pentru $y=h_1$ și $y=-h_2$.

În fig. 9.6 este reprezentată diagrama variației deformației și a efortului unitar, în cazul solicitării elementului elastic termobimetalic numai de către forțe exterioare.

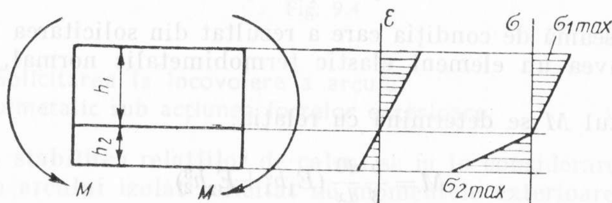



Fig. 9.6

În acest mod, problema determinării săgeții (deplasării) arcului bimetalic sub acțiunea forțelor exterioare se rezolvă determinînd săgeata unui arc simplu lamelar, care are un modul de elasticitate egal cu modulul de elasticitate echivalent pentru lamela termobimetalică.

Pentru arcul bimetalic solicitat de forțe exterioare și supus la încălzire săgețile date de încălzire și de solicitarea forțelor exterioare se calculează izolat și se adună obținînd săgeata totală. În mod asemănător se procedează la calculul eforturilor unitare.



În cazul arcului termobimetalic solicitat numai la încălzire se poate proceda, de asemenea, la echivalarea sa cu un arc lamelar echivalent, căruia i se aplică la capăt un moment de încovoiere echivalent:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\theta}{dx}=\frac{3}{2}(\alpha_1-\alpha_2)\frac{t}{(h_1+h_2)}=\frac{M_i}{E_{ech}I}, \qquad (9.24)$$

$$M_i=\frac{3}{2}(\alpha_1-\alpha_2)\,t\,\frac{E_{ech}I}{h}, \qquad (9.25)$$

unde $E_{ech}=\dfrac{4E_1E_2}{(\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2})}$.

Relațiile de calcul stabilite sînt valabile pentru arcuri bimetalice înguste, de lungime mare. În cazul arcurilor termobimetalice late, relațiile de calcul trebuie corectate ținînd seamă de influența dilatării și deci a deformațiilor care apar în sens transversal.

# 10

# Elemente elastice în formă de membrană

## 10.1. Generalități

Membrana este o placă elastică subțire, ondulată sau neondulată, de obicei rotundă, care, deformîndu-se elastic sub acțiunea unei forțe concentrate sau uniform repartizate, acumulează lucrul mecanic pe care îl redă.

Membrana trebuie fixată pe contur. Fixarea poate fi rigidă sau alunecătoare.

Membranele au o utilizare foarte mare în construcția aparatelor manometrice de înaltă precizie.

În industria constructoare de aparate noțiunea de membrană are un sens mai larg decît cel utilizat în teoria elasticității. Se înțelege astfel, prin membrană, orice placă subțire capabilă de a se deforma elastic foarte mult sub acțiunea unei sarcini, indiferent că ea lucrează la încovoiere sau la întindere.

O dimensiune caracteristică importantă a membranelor o constituie diametrul activ, adică diametrul membranei măsurat pe conturul de fixare. Acest diametru activ este determinat de dimensiunile de gabarit stabilite, de mărimea necesară a suprafeței efective, de săgeată necesară la centru, de coeficientul de siguranță la rezistență etc. Diametrul membranei poate avea mărimi cuprinse între 10—15 mm și 200—300 mm. Grosimea membranei se alege în funcție de sensibilitatea și rezistența necesare ei și în funcție de caracteristicile mecanice ale materialului;



de regulă, grosimea este de 0,06—1,5 mm pentru membranele metalice și de 0,1—5 mm pentru cele nemetalice.

Forma geometrică a membranelor are o influență categorică asupra caracteristicii lor, care poate fi fie liniară, fie neliniară. Se deosebesc membrane plate (fig. 10.1, *a*), ondulate (gofrate) (fig. 10.1, *b*), concave (sferice) (fig. 10.1, *c*) și membrane nemetalice prevăzute cu arc elicoidal (fig. 10.1, *d*).

Membranele ondulate pot fi lipite pe contur două cîte două, formînd capsule elastice. Prin împerecherea membranelor în capsule se obțin ele-

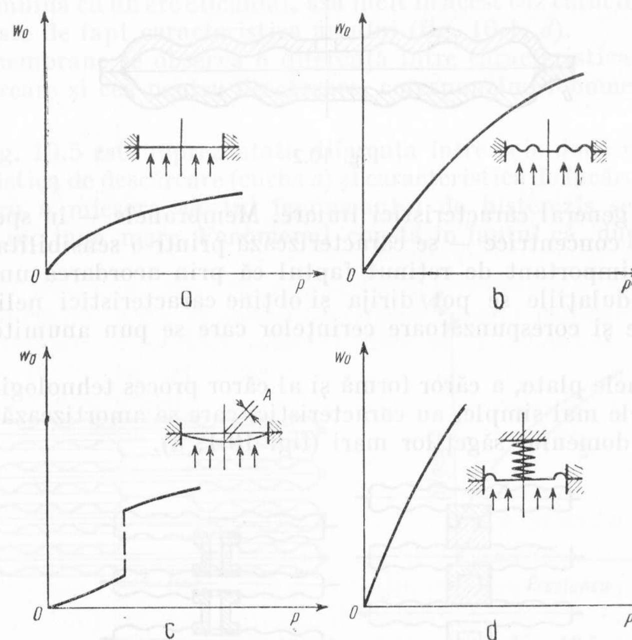



Fig. 10.1

mente elastice cu caracteristici diferite. În fig. 10.2 se reprezintă schema unor capsule. Se deosebesc două tipuri de capsule: aneroide și manometrice.

Capsulele aneroide sînt complet închise, presiunea aplicîndu-se din exterior, iar la capsulele manometrice fluidul sub presiune acționează din interiorul capsulei.

Capsulele, la rîndul lor, pot fi grupate, prin asamblare, în blocuri cu centrul montat rigid (fig. 10.3, *a*) sau montate cu garnituri elastice (fig. 10.3, *b*) și în baterii (fig. 10.4).

Membranele capsulelor și bateriile de capsule pot avea caracteristici variate (după nevoie), spre deosebire de celelalte elemente elastice,

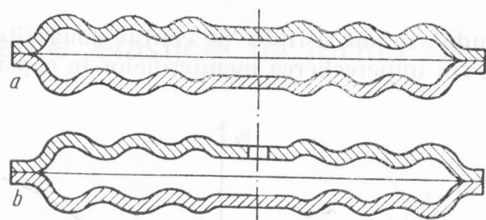



Fig. 10.2

care dau în general caracteristici liniare. Membranele — în special cele cu ondulații concentrice — se caracterizează printr-o sensibilitate foarte mare. Este important de reținut faptul că prin acordarea unor forme speciale, ondulațiile se pot dirija și obține caracteristici neliniare de forme dorite și corespunzătoare cerințelor care se pun anumitor dispozitive.

Membranele plate, a căror formă și al căror proces tehnologic de execuție sînt cele mai simple, au caracteristici care se amortizează brusc la presiune în domeniul săgeților mari (fig. 10.1, *a*).

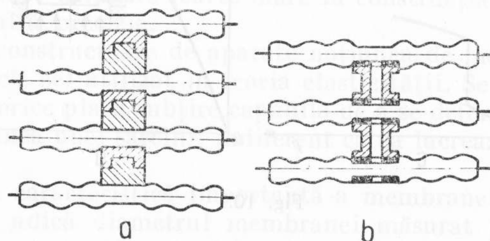



Fig. 10.3

În cazul membranelor gofrate, caracteristicile sînt mai înclinate, în sensul că săgețile de lucru se măresc (fig. 10.1, *b*). Aceste membrane au o tehnologie mai complexă și totodată calculul lor este mai dificil, în



schimb — datorită faptului că forma caracteristicii poate fi dirijată convenabil scopurilor printr-un profil corespunzător al ondulațiilor — domeniul de utilizare al acestora este foarte larg, mai ales în construcția de aparate de măsură și de elemente de automatizare.

Membranele concave (sferice sau conice), (fig. 10.1, *c*) dacă sînt solicitate pe partea concavă, au caracteristică cu salt datorită pierderii de stabilitate. Acest mod de lucru face ca ele să fie utilizate în mod deosebit la relee și dispozitive de semnalizare, la conectarea și deconectarea contactelor.

Membranele nemetalice au o rigiditate redusă, și din această cauză ele se combină cu un arc elicoidal, așa încît în acest caz caracteristica membranei este de fapt caracteristica arcului (fig. 10.1, *d*).

La membrane se observă o diferență între caracteristica trasată pentru încărcare și cea pentru descărcare, corespunzînd fenomenului de histerezis.

În fig. 10.5 este reprezentată diferența între cele două caracteristici: caracteristica de descărcare (curba *a*) și caracteristica de încărcare (curba *b*).

Pentru a micșora efectul fenomenului de histerezis se lucrează cu plăci cu secțiune mare. Fenomenul constă în faptul că, după îndepărtarea sarcinii, membrana nu revine îndată la starea inițială. Întîrzierea poate ajunge la cîteva ore. Acest fenomen de întîrziere la revenirea la starea inițială se numește fenomen de întîrziere elastic.

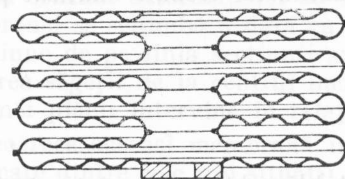


Fig. 10.4

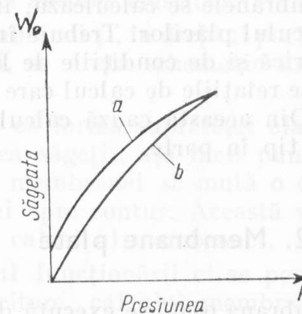



Fig. 10.5

Membranele se folosesc la aparatele de măsură ca element elastic, îndeosebi la aparatele manometrice de înaltă clasă de precizie ca: altimetre, manovacuummetre, indicatoare de benzină, vitezometre etc.

Cu ajutorul membranelor pot fi măsurate presiuni de la sute de atmosfere pînă la presiuni de cîţiva milimetri coloană de apă. Este important de remarcat faptul că membranele mai pot fi utilizate ca mijloc de despărţire a două medii şi ca mijloc de etanşare elastică, pentru transmiterea deplasărilor din domeniul presiunilor sau al rarefierilor.

Membranele plate au o caracteristică amortizată, astfel că din cursa posibilă numai o parte este liniară, utilizîndu-se practic numai această parte. În consecinţă, membranele plate se pot folosi numai la acele aparate la care este nevoie de o cursă mică.

Membranele plate se pot utiliza şi ca transformatoare de presiune în forţă, cu ajutorul unor traductoare piezoelectrice, magnetoelastice, cu rezistenţă sau de frecvenţă.

Membranele plate combinate cu astfel de traductoare au pentru oscilaţiile proprii o frecvenţă mare, ceea ce permite utilizarea lor la măsurarea presiunilor variabile cu frecvenţă mare, de ordinul sutelor şi miilor de hertzi.

Membranele de diferite forme geometrice se utilizează în funcţie de forma caracteristicii lor, care poate fi adusă la o alură dorită prin găsirea unei forme de gofraj corespunzătoare.

Membranele se calculează, în principiu, pe baza ipotezelor obişnuite din calculul plăcilor. Trebuie însă ţinut seama în acest calcul de forma geometrică şi de condiţiile de lucru specifice fiecărui tip de membrană, deoarece relaţiile de calcul care rezultă diferă foarte mult de la un tip la altul. Din această cauză calculul membranelor trebuie analizat pentru fiecare tip în parte.

## 10.2. Membrane plate

Membrana plată se execută dintr-o tablă subţire, bine întinsă şi bine fixată pe contur. În fig. 10.6 este reprezentată schema unei membrane plate, întinsă la montarea în aparat şi solicitată la presiune.

Relaţiile de calcul pentru membrana plată depind de modul de solicitare. În cazul săgeţilor mici se poate considera că deplasările membranei se datoresc în special solicitării la incovoiere. În acest caz, planul mediu al membranei are o alungire neglijabilă, iar caracteristica este liniară.

Calculul membranei este în acest caz bazat pe teoria liniară a încovoierii plăcilor circulare.



În caz că săgeţile sînt mari şi devin comparabile cu grosimea, planul mediu se alungeşte, astfel încît — afară de solicitarea la încovoiere — capătă importanţă şi solicitarea la întindere în planul mediu. În acest caz, calculul membranelor se bazează pe teoria neliniară, care ţine seamă atît de încovoierea, cît şi de întinderea membranei în planul mediu.

Dacă săgeţile devin foarte mari, calculul membranei trebuie făcut pe baza teoriei membranei absolut elastice, neglijîndu-se rigiditatea la încovoiere.

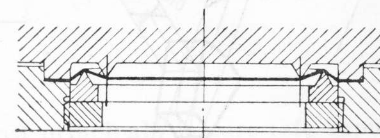


Fig. 10.6

Desigur că trebuie luată în seamă şi grosimea membranei, deoarece, dacă la membranele suficient de subţiri se pot obţine, în domeniul elastic, săgeţi mari, la membranele de grosimi mari apar deformaţii plastice chiar pentru săgeţi mici.

În fig. 10.7 este reprezentată schema unei plăci plate, precum şi forma ei deformată în cele trei situaţii: *) săgeţi mici (solicitări la încovoiere), săgeţi mari comparabile cu grosimea (solicitări la încovoiere şi întindere) şi săgeţi foarte mari (cazul membranei absolut elastice).

În figură se arată şi caracteristica membranei şi, în dreptul porţiunilor corespunzătoare ale acestei caracteristici, se arată schematic modul în care sînt solicitate membranele.

Din schema deformaţiilor se observă că forma suprafeţei elastice a membranei se schimbă o dată cu creşterea săgeţii, aşa încît punctul de inflexiune de pe linia secţiunii axiale a membranei se mută o dată cu creşterea săgeţii de la centrul membranei spre contur. Această variaţie a formei plăcii intervine în relaţiile de calcul al membranei.

Deoarece aceeaşi membrană în timpul funcţionării ei se poate afla în oricare dintre cele trei situaţii de solicitare, calculul membranei stabilit numai pe o categorie de solicitare este nesatisfăcător. A fost necesar să se stabilească un mod de calcul precis, care să cuprindă toate cele trei tipuri de solicitări, adică să stabilească relaţii de calcul valabile pe toată caracteristica de lucru a membranei.

Metoda de calcul a fost stabilită de V. I. Fedoseev.

*) Notaţiile referitoare la eforturile $\sigma$, au următoarele semnificaţii:
$\sigma_{ri}$ — efortul unitar radial datorat încovoierii;
$\sigma_{rt}$ — efortul unitar radial datorat întinderii;
$\sigma_{ti}$ — efortul unitar circumferenţial, care apare datorită încovoierii;
$\sigma_{tt}$ — efortul unitar circumferenţial, care apare datorită întinderii.

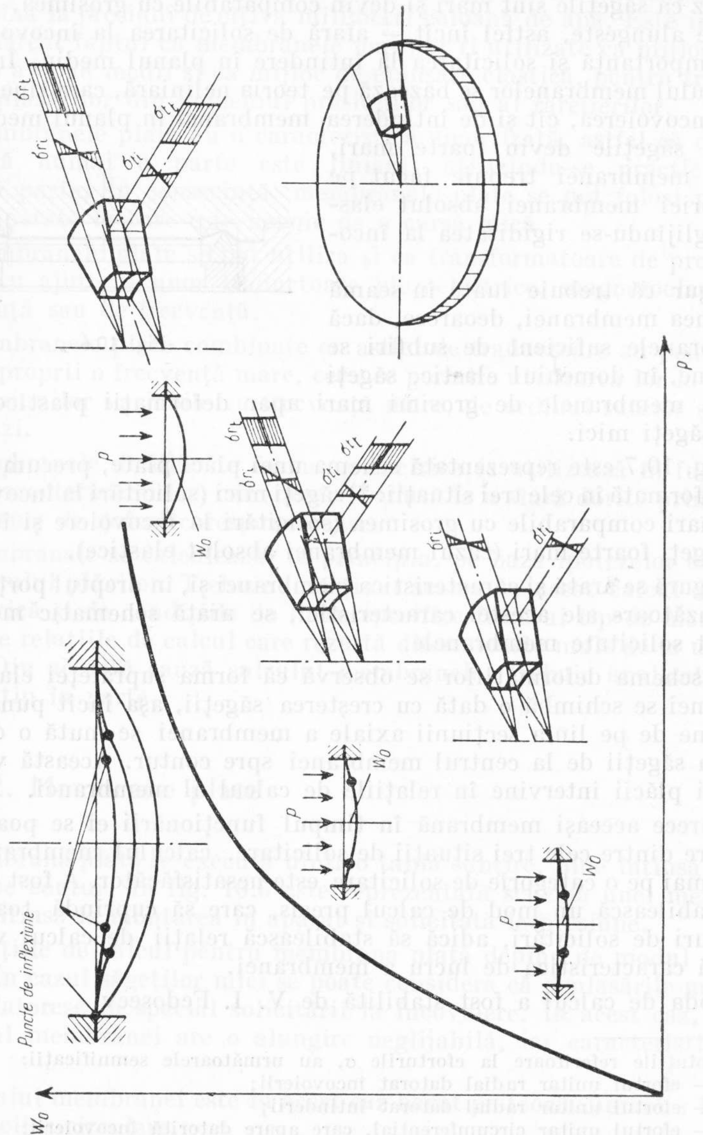



Fig. 10.7



Pentru a se putea vedea rezultatele metodei de calcul stabilite de V. I. Fedoseev, este necesară prezentarea în prealabil a relațiilor de calcul pentru fiecare caz de solicitare în parte. Deoarece cazul deplasărilor mari este un caz particular al membranei absolut elastice, în cele ce urmează se vor deosebi două situații, și anume: cazul micilor deplasări și cazul membranei absolut elastice.

## 10.2.1. Cazul membranei plate în domeniul micilor deplasări

În acest caz se consideră că solicitarea principală la care este supus materialul plăcii este cea de încovoiere și se neglijează solicitarea la întindere, care ar apărea în planul mediu al plăcii.

În fig. 10.8 este reprezentată schematic o astfel de placă unde se evidențiază eforturile care apar la un element de placă, separat prin două secțiuni axiale și două cilindrice.

S-au notat cu $M_r$ și $M_t$ momentele încovoietoare raportate la unitatea de lungime în sens radial și în sens tangențial și cu $T_r$ — forța transversală pe unitatea de lungime.

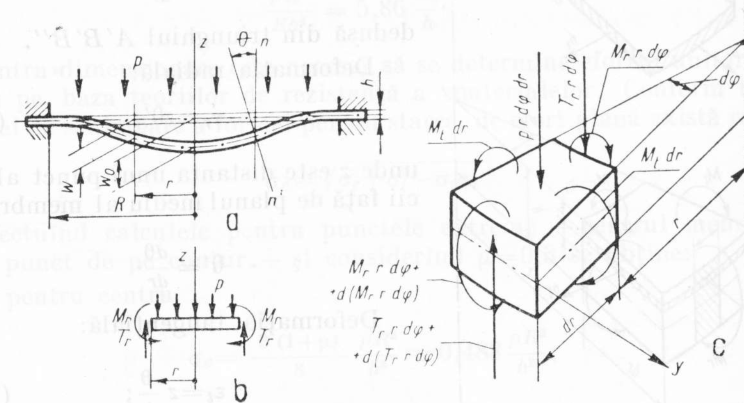



Fig. 10.8

Deoarece placa are o simetrie polară în raport cu axa z, factorii de forță și geometrici variază numai cu raza și, din această cauză, momentele tangențiale $M_t$ de pe fețele opuse ale elementului separat sînt egale.

În lungul razei atît momentul $M_r$, cît și forța transversală $T_r$ variază cu lungimea razei.

Sub acțiunea sarcinii placa se deformează și implicit fiecare element al plăcii se deformează.

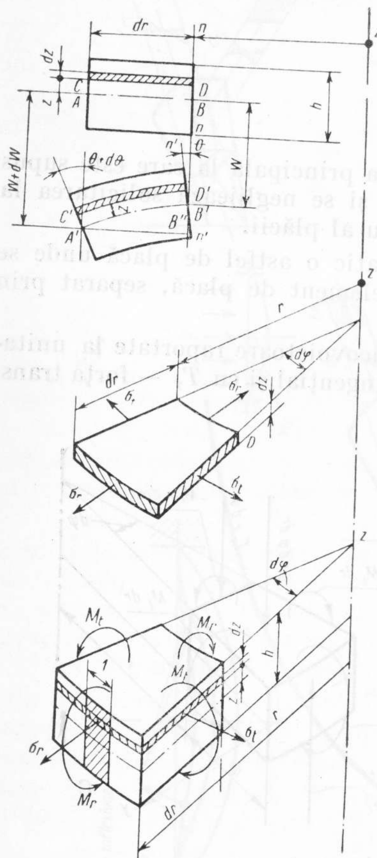


Fig. 10.9

În fig. 10.9 sînt reprezentate deformațiile și eforturile unitare care apar într-un element al plăcii. În cazul micilor deplasări se consideră că punctele suprafeței medii nu se deplasează în sens radial (solicitarea la întindere fiind neglijabilă), ci doar în sensul axei $z$, primind săgeți verticale $w$. În acest mod, lungimea segmentului $AB$ rămîne neschimbată și după deformare, astfel că $AB=A'B'=dr$. Unghiul de rotire al normalei $n-n$ este legat de săgeată, ca și în teoria încovoierii barelor, prin relația:

$$\theta=\frac{dw}{dr}, \tag{10.1}$$

dedusă din triunghiul $A'B'B''$.

Deformația radială:

$$\varepsilon_r=z\theta', \tag{10.2}$$

unde $z$ este distanța unui punct al plăcii față de planul mediu al membranei;

$$\theta'=\frac{d\theta}{dr}.$$

Deformația tangențială:

$$\varepsilon_t=z\frac{\theta}{r}; \tag{10.3}$$

unde $r$ este raza cercului pe care se află punctul considerat al plăcii.

Deoarece eforturile de compresiune în direcția axei $z$ se neglijează, calculele de rezistență se efectuează considerînd că starea de eforturi a plăcii este plană.



Eforturile unitare radiale și tangențiale maxime la suprafețele superioară și inferioară ale membranei au valorile date de relațiile:

$$(\sigma_r)_{z=\pm\frac{h}{2}}=\pm\frac{3}{8}\frac{pR^2}{h^2}\left[(3+\mu)\frac{r^2}{R^2}-(1+\mu)\right]; \tag{10.4}$$

$$(\sigma_t)_{z=\pm\frac{h}{2}}=\pm\frac{3}{8}\frac{pR^2}{h^2}\left[(3\mu+1)\frac{r^2}{R^2}-(1+\mu)\right],$$

în care: $h$ este grosimea plăcii;

$p$ — presiunea care solicită placa;

$R$ — raza la conturul de sprijin al plăcii.

Săgeata $w_0$ în centrul membranei este dată de relația:

$$\frac{pR^4}{Eh^4}=\frac{16}{3(1-\mu^2)}\frac{w_0}{h}, \tag{10.5}$$

în care: $E$ este modulul de elasticitate al materialului din care este executată placa.

Pentru $\mu=0,3$ se obține:

$$\frac{pR^4}{Eh^4}=5,86\frac{w_0}{h}. \tag{10.6}$$

Pentru dimensionare este necesar să se determine efortul unitar echivalent pe baza teoriilor de rezistență a materialelor. Conform teoriei energiei de schimbare a formei pentru starea de efort plană există relația:

$$\sigma_e=\sqrt{\sigma_r^2+\sigma_t^2-\sigma_r\sigma_t}. \tag{10.7}$$

Efectuînd calculele pentru punctele extreme — centrul membranei și un punct de pe contur — și considerînd $\mu=0,3$ se obține:

— pentru centru

$$\sigma_e=\frac{3(1+\mu)}{8}\frac{pR^2}{h^2}\approx 0,488\frac{pR^2}{h^2}; \tag{10.8}$$

— pentru marginea membranei

$$\sigma_e=\frac{3}{4}\frac{pR^2}{h^2}\sqrt{1-\mu+\mu^2}\approx 0,666\frac{pR^2}{h^2}. \tag{10.9}$$

Se observă că solicitarea periculoasă este în punctul de încastrare al membranei.

Pentru determinarea presiunii admisibile se pune condiția ca efortul echivalent maxim să fie inferior efortului unitar admisibil:

$$\sigma_e = 0{,}666 \frac{pR^2}{h^2} \leqslant \sigma_a. \qquad (10.10)$$

Rezultă:

$$p_a = 1{,}5\, \sigma_a \frac{h^2}{R^2}. \qquad (10.11)$$

Săgeata admisibilă se determină eliminînd presiunea $p$ din expresiile presiunii admisibile și ale săgeții în centrul membranei:

$$(w_0)_a = 0{,}256\, \sigma_a \frac{R^2}{Eh}. \qquad (10.12)$$

Un caz particular, des întîlnit în practică, îl constituie cazul membranei cu centru rigid de rază $r_0$, a cărei schemă este reprezentată în fig. 10.10.

Relația săgeții maxime în centru, în cazul cînd membrana este supusă presiunii $p$ (fig. 10.10, *a*), este următoarea:

$$w_0 = A_q \frac{p\,R^4}{E\,h^3}, \qquad (10.13)$$

în care coeficientul $A_q$ este dependent de raportul dintre raza activă $R$ și razei $r_0$ a conturului rigid $\left(e^e = \frac{R}{r_0}\right)$

$$A_q = \frac{3\,(1-\mu^2)}{16}\, \frac{e^4 - 1 - 4\,e^2 \ln e}{e^4}. \qquad (10.14)$$

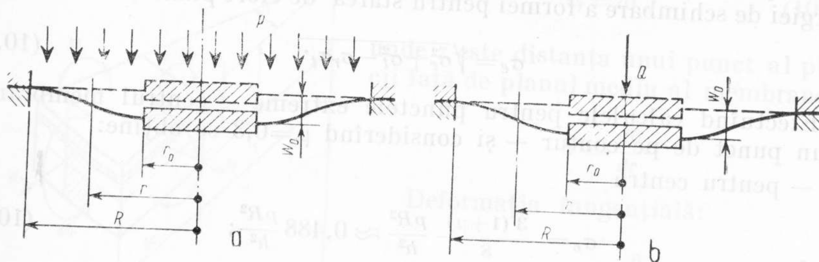



Fig. 10.10

Eforturile unitare radiale din punctele de pe conturul exterior, aflate pe suprafețele superioare sau inferioare ale membranei, sînt date de relația:

$$\sigma_r = \pm B_q \frac{Ehw_0}{R^2}, \qquad (10.15)$$



unde coeficientul $B_q$ este dat de relația:

$$B_q = \frac{4}{1-\mu^2}\, \frac{e^2(e^2-1)}{e^4 - 1 - 4\,e^2 \ln e}. \qquad (10.16)$$

Eforturile unitare tangențiale se determină cu relația:

$$\sigma_t = \mu \sigma_r. \qquad (10.17)$$

Cunoscînd relațiile pentru $\sigma_r$, $\sigma_t$ și $w_0$, calculul de dimensionare se face în mod asemănător celui stabilit la cazul anterior.

Un caz des întîlnit îl constituie membrana cu centru rigid solicitată de o forță concentrată $Q$, aplicată în centrul său ca în fig. 10.10, *b*.

În acest caz relațiile de calcul devin:
pentru săgeată

$$w_0 = A_K \frac{QR^2}{E\,h^3}, \qquad (10.18)$$

unde:

$$A_K = \frac{3(1-\mu^2)}{4\pi} \left[\frac{e^2-1}{e^2} \;\; \frac{4 \ln^2 e}{e^2-1}\right]; \qquad (10.19)$$

pentru eforturile unitare radiale pe conturul exterior și pe cel interior

$$\sigma_{re} = \pm B_{Ke} \frac{E\,h\,w_0}{R^2} \text{ și } \sigma_{ri} = \pm B_{Ki} \frac{E\,h\,w_0}{R^2}, \qquad (10.20)$$

unde

$$B_{Ke} = \frac{2}{1-\mu^2} \cdot \frac{e^2(e^2-1-2\ln e)}{(e^2-1)^2 - 4\,e^2 \ln^2 e} \qquad (10.21)$$

și

$$B_{Ki} = \frac{2}{1-\mu^2} \cdot \frac{e^2(2e^2 \ln e - e^2 + 1)}{(e^2-1)^2 - 4e^2 \ln^2 e}. \qquad (10.22)$$

Valorile coeficienților $A_q$, $B_q$ $A_K$, $B_{Ke}$ și $B_{Ki}$ sînt date în tabela 11.1 în funcție de raportul $e$.

Dacă forța $Q$ acționează excentric asupra centrului rigid, atunci efectul ei asupra membranei poate fi redus la efectul momentului încovoietor aplicat asupra centrului rigid. Solicitarea membranei în acest caz nu mai este simetrică și este foarte complexă. Placa care formează centrul rigid se rotește cu un unghi $\varphi$ dat de relația:

$$\varphi = A_r \frac{M}{Eh^3}, \qquad (10.23)$$

unde

$$A_r = \frac{3(1-\mu^2)}{\pi}\left(\ln e - \frac{e^2-1}{e^2+1}\right). \qquad (10.24)$$

Eforturile unitare maxime pe conturul exterior și pe cel interior ale membranei sînt date de relațiile:

$$\sigma_{re} = B_{re}\frac{\varphi Eh}{R} \text{ și } \sigma_{ri} = B_{ri}\frac{\varphi Eh}{R}, \qquad (10.25)$$

unde

$$B_{re} = \frac{3}{\pi}\frac{e^2-1}{e^2+1}\frac{1}{A_z}; \qquad (10.26)$$

$$B_{ri} = B_{re}\, e. \qquad (10.27)$$

Valorile acestor coeficienți sînt date în tabela 11.1.

### 10.2.2. Cazul membranei plate în domeniul deplasărilor mari și foarte mari (membrane absolut elastice)

În cazul membranei cu deplasări foarte mari, adică al membranei absolut elastice, solicitarea la încovoiere este neglijabilă și se ține seamă numai de solicitarea la întindere.

În fig. 10.11 este reprezentat un element de membrană și solicitările la care este supus în cazul deplasărilor mari.

După cele expuse, referitor la membrana absolut elastică, solicitările la încovoiere dispar și asupra elementului de placă nu mai acționează decît forțele de întindere radială $N_r$ și tangențială $N_t$ (fig. 10.11, *a*) care produc eforturile unitare $\sigma_r$ și $\sigma_t$, ca în fig. 10.12.

Calculul precis al membranelor care să cuprindă atît domeniul deformațiilor mici, cît și domeniul deplasărilor mari a fost stabilit de V. I. Fedoseev.

Metoda de calcul stabilită de V. I. Fedoseev pornește de la rezolvarea ecuațiilor diferențiale ale membranelor în domeniul deplasărilor mari:

$$\rho\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{d\psi}{d\rho} - \frac{\psi}{\rho} = -\frac{\theta^2}{2}$$

$$\rho\frac{d^2\theta}{d\rho^2} + \frac{d\theta}{d\rho} - \frac{\theta}{\rho} = \frac{R^2}{D}\left[-Eh\,\psi\theta + \frac{1}{2}pR\rho^2\right], \qquad (10.28)$$



unde: $p$ este presiunea pe unitatea de suprafață;

$R$ — raza suprafeței active a membranei;

$\rho$ — raza relativă; $\rho = \frac{r}{R}$;

$r$ — raza cercului pe care se află latura interioară a elementului (fig. 10.11, *b*)

$\theta$ — unghiul de rotire al normalei într-un punct oarecare al suprafeței medii (fig. 10.11, *b*).

$\psi$ reprezintă o funcție adimensională care depinde de forța de întindere în sens radial $N_r$ și este dată de relația:

$$\psi = \frac{N_r\rho}{Eh^2}, \qquad (10.29)$$

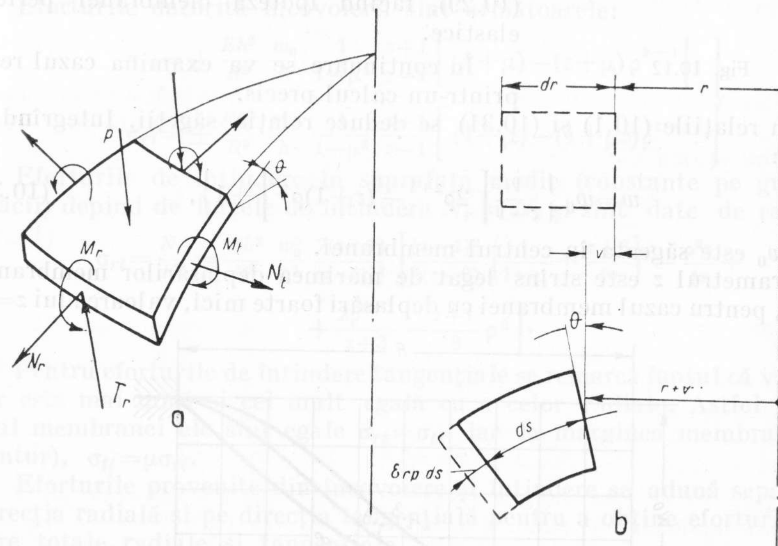



Fig. 10.11

iar $D$ reprezintă rigiditatea la încovoiere a membranei. În cazul membranelor absolut elastice, rigiditatea la încovoiere $D$ se poate considera nulă astfel că sistemul de ecuații diferențiale devine:

$$\rho\psi'' + \psi' - \frac{\psi}{\rho} = -\frac{\theta^2}{2}$$

$$\psi\theta = \frac{pR}{2Eh}\rho^2. \qquad (10.30)$$

Integrarea acestor ecuații diferențiale se face după metoda lui Bubnov-Galerkin. Pe baza acestei metode, ecuația pentru unghiul de rotire al normalei într-un punct al membranei se alege sub forma:

$$\theta=c(\rho^z-\rho), \tag{10.31}$$

sau

$$\theta=c\rho, \tag{10.32}$$

unde $c$ și $z$ sînt parametrii care se determină prin metoda Bubnov-Galerkin. Relația (10.31) se utilizează în ecuațiile (10.28) pentru un calcul precis, iar relația (10.32) în ecuațiile (10.29), făcînd ipoteza membranei perfect elastice.

Fig. 10.12

În continuare se va examina cazul real, printr-un calcul precis.

Din relațiile (10.1) și (10.31) se deduce relația săgeții. Integrînd se obține:

$$w=w_0\left\{\frac{1}{z-1}\left[2\rho^{z+1}-(z+1)\rho^2\right]+1\right\}, \tag{10.33}$$

unde $w_0$ este săgeata în centrul membranei.

Parametrul $z$ este strîns legat de mărimea deplasărilor membranei. Astfel, pentru cazul membranei cu deplasări foarte mici, valoarea lui $z=3$.

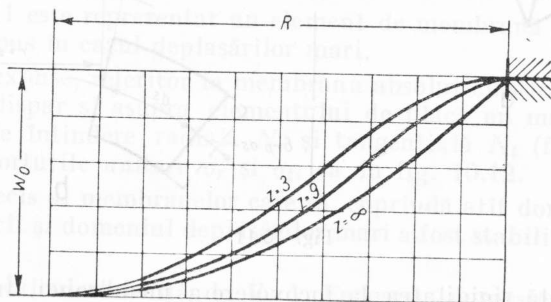



Fig. 10.13

Pentru cazul membranei absolut elastice valorile lui $z$ cresc luînd, în cazul extrem al suprafeței sferice, valoarea $z=\infty$. În fig. 10.13 este reprezentată variația formei generatoarei suprafeței elastice a membranei în funcție de mărimea parametrului $z$, pentru aceeași săgeată $w_0$ la centru.



Valorile lui $z$ se stabilesc în funcție de raportul dintre săgeată și grosimea membranei $\frac{w_0}{h}$, denumit și săgeată relativă a membranei (v. fig. 10.15).

Pentru dimensionare și pentru stabilirea curbei caracteristice a membranei, pornind de la ecuațiile diferențiale de bază indicate, V. I. Fedoseev a folosit metoda suprapunerii efectelor.

Astfel eforturile unitare în membrană pot fi redate ca sumă a eforturilor unitare provenite din încovoiere $\sigma_i$ și a eforturilor de întindere $\sigma_t$ în suprafața medie:

$$\sigma=\sigma_i+\sigma_t.$$

Aceste eforturi unitare apar atît în sens radial, cît și în sens tangențial.

Eforturile datorită încovoierii sînt următoarele:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{ri}&=\pm\frac{Eh^2}{R^2}\,\frac{w_0}{h}\,\frac{1}{1-\mu^2}\,\frac{z+1}{z-1}\left[(1+\mu)-(z+\mu)\,\rho^{z-1}\right];\\ \sigma_{ri}&=\pm\frac{Eh^2}{R^2}\,\frac{w_0}{h}\,\frac{1}{1-\mu^2}\,\frac{z+1}{z-1}\left[(1+\mu)-(1+\mu z)\rho^{z-1}\right].\end{aligned}\right\} \tag{10.34}$$

Eforturile de întindere în suprafața medie (constante pe grosimea plăcii) depind de forțele de întindere $N_r$ și $N_t$ și sînt date de relațiile:

$$\sigma_{rt}=\frac{N_r}{h^2}=\frac{Eh^2}{R^2}\,\frac{w_0^2}{h^2}\,\frac{2(z+1)}{(z-1)^2}\left[\frac{(z-1)^2}{4(z+3)}\left(\frac{1}{1-\mu}+\frac{z+6}{2z}\right)-\frac{\rho^2 z}{4z}+\right.$$
$$\left.+\frac{2\rho^{z+1}}{z+3}-\frac{z+1}{8}\rho^2\right]. \tag{10.35}$$

Pentru eforturile de întindere tangențiale se remarcă faptul că valoarea lor este mai mică și cel mult egală cu a celor radiale. Astfel în centrul membranei ele sînt egale $\sigma_{rt}=\sigma_{tt}$, iar la marginea membranei (pe contur), $\sigma_{tt}=\mu\sigma_{rt}$.

Eforturile provenite din încovoiere și întindere se adună separat pe direcția radială și pe direcția tangențială pentru a obține eforturile unitare totale radiale și tangențiale.

Astfel:

$$\sigma_r=\sigma_{ri}+\sigma_{rt};$$
$$\sigma_t=\sigma_{ti}+\sigma_{tt}.$$

Valorile extreme se obțin la centrul membranei și pentru punctele de pe contur.

În centrul membranei, $\rho=0$ (raza relativă)

$$\sigma_r=\sigma_t=\frac{Eh^2}{R^2}\,\frac{w_0}{h}\,\frac{1+z}{1-\mu}\left\{\mp\frac{1}{z-1}+\frac{w_0}{h}\,\frac{1}{2(z+3)}\left[1+(1-\mu)\,\frac{z+6}{2z}\right]\right\}. \tag{10.36}$$

Pentru punctele de pe contur, $\rho=1$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{Eh^2}{R^2}\frac{w_0}{h}\frac{1+z}{1-\mu}\left[\pm\frac{1}{1+\mu}\frac{w_0}{h}\frac{1}{2(z+3)}\right]\\ \sigma_t&=\mu\sigma_r.\end{aligned}\right\}\tag{10.37}$$

În aceste relații se ia semnul de sus pentru punctele de pe suprafața superioară a membranei solicitată de presiune, și cel de jos pentru punctele suprafeței inferioare.

Analizînd aceste relații se poate remarca faptul că solicitarea periculoasă este pe contur.

Tot pe baza metodei suprapunerii, V. I. Fedoseev a stabilit ecuațiile caracteristicii membranei. Pe baza acestei metode, solicitarea membranei poate fi exprimată sub forma:

$$\frac{pR^4}{Eh^4}=\left(\frac{pR^4}{Eh^4}\right)_i+\left(\frac{pR^4}{Eh^4}\right)_t,\tag{10.38}$$

în care termenul din stînga caracterizează rezistența totală a membranei, iar cei din dreapta — rezistența la încovoiere, respectiv la întindere.

Ținînd seama că:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{pR^4}{Eh^4}\right)_i&=\frac{16}{3\,(1-\mu^2)}\frac{w_0}{h}\\ \left(\frac{pR^4}{Eh^4}\right)_t&=\frac{7-\mu}{3\,(1-\mu)}\frac{w_0^3}{h^3},\end{aligned}\right\}\tag{10.39}$$

se obține:

$$\frac{pR^4}{Eh^4}=\frac{16}{3\,(1-\mu^2)}\frac{w_0}{h}+\frac{7-\mu}{3\,(1-\mu)}\frac{w_0^3}{h^3},\tag{10.40}$$

iar pentru $\mu=0{,}3$

$$\frac{pR^4}{Eh^4}=5{,}86\,\frac{w_0}{h}+3{,}19\,\frac{w_0^3}{h^3}.\tag{10.41}$$

În fig. 10.14 este reprezentată caracteristica membranei plate în domeniul deplasărilor mari. Curba $a$ reprezintă caracteristica trasată în urma unui calcul bazat pe formule exacte, curba $b$, caracteristica trasată după teoria lineară, iar curba $c$ reprezintă caracteristica trasată pe baza ipotezei membranei absolut elastice.

În cazul membranei cu centru rigid, relația care dă caracteristica membranei devine:

$$\frac{pR^4}{Eh^4}=\frac{1}{A_q}\frac{w_0}{h}+B_q\frac{w_0^3}{h^3},\tag{10.42}$$

unde coeficienții $A_q$ și $B_q$ sînt dați în tabela 11.1.

Pentru a efectua un calcul expeditiv și independent de dimensiunile geometrice ale membranei, V. I. Fedoseev a întocmit diagrame care



pot fi utilizate la determinarea eforturilor. În aceste diagrame introduce noțiunile de presiune relativă, efort radial relativ și săgeată rela-

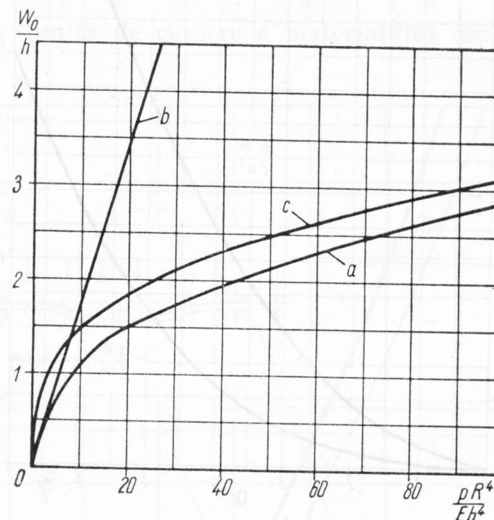



Fig. 10.14

tivă ale membranei date respectiv de relațiile $\frac{pR^4}{Eh^4}$; $\frac{\sigma_r R^2}{Eh^2}$ și $\frac{w_0}{h}$, a căror expresie este conținută în relațiile eforturilor și ale săgeților membranei.

Diagramele în coordonate adimensionale a presiunii relative și a efortului radial maxim relativ și a lui $z$ în funcție de săgeata relativă sînt date în fig. 10.15, $a$, iar cea a lui $z$ în funcție de săgeata relativă în fig. 10.15, $b$.

În fig. 10.16 sînt reprezentate comparativ diagramele eforturilor relative provenite din încovoiere, întindere și efortul total (în linii groase) pentru punctele extreme $L$ din centrul membranei și $M$ de pe contur.

Pentru dimensionare este necesar să se stabilească efortul echivalent în punctul periculos al membranei. Astfel pe baza teoriei energetice de rezistență:

$$\sigma_e=\sqrt{\sigma_r^2+\sigma_t^2-\sigma_r\sigma_t}\tag{10.43}$$

Ținînd seamă că $\sigma_t=\mu\sigma_r$ și $\mu=0{,}3$ se obține

$$\sigma_e=\sigma_r\sqrt{1-\mu+\mu^2}=0{,}89\ \sigma_r\leqslant\sigma_a.\tag{10.44}$$

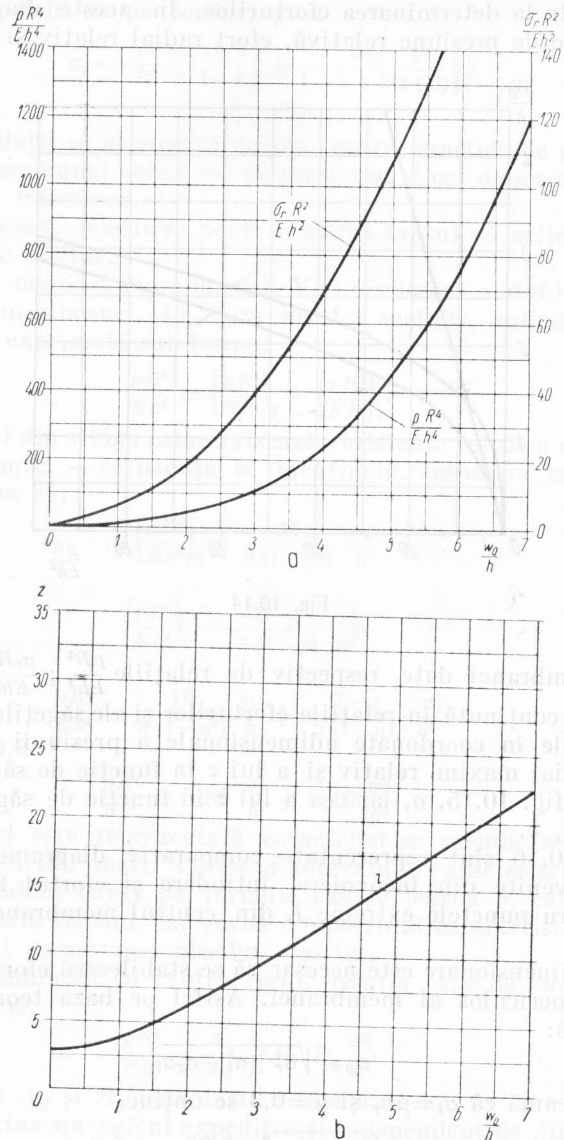


Fig. 10.15



Coeficientul de siguranță $c$ al membranei este dat de relația:

$$c = \frac{\sigma_c}{\sigma_e}, \tag{10.45}$$

unde: $\sigma_c$ este limita de curgere a materialului membranei.

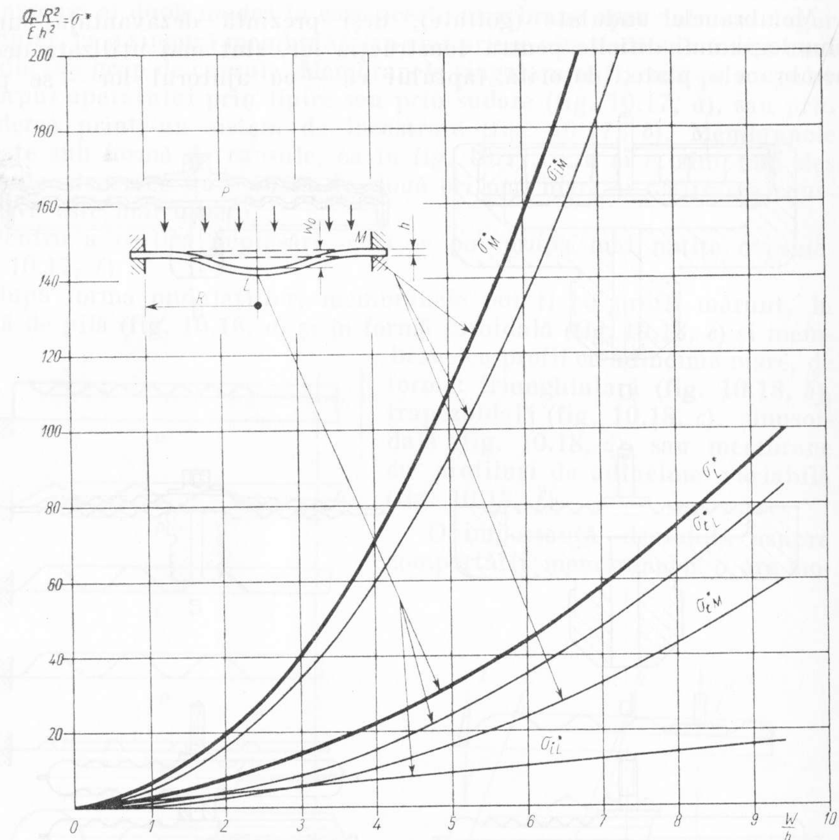


Fig. 10.16

Pentru membranele folosite ca perete despărțitor este important să se poată determina volumul, care se formează între suprafața inițială a membranei și cea determinată de membrana deformată.

Relația cu care se determină acest volum este următoarea:

$$V = \pi R^2 w_0 \frac{z+1}{2(z+3)}. \tag{10.46}$$

## 10.3. Membrane ondulate (gofrate)

### 10.3.1. Considerații generale

Membranele ondulate (gofrate), deși prezintă dezavantajul unei tehnologii mai dificile pentru construcția lor, sînt mai utilizate decît membranele plate, datorită faptului că — cu ajutorul lor — se pot

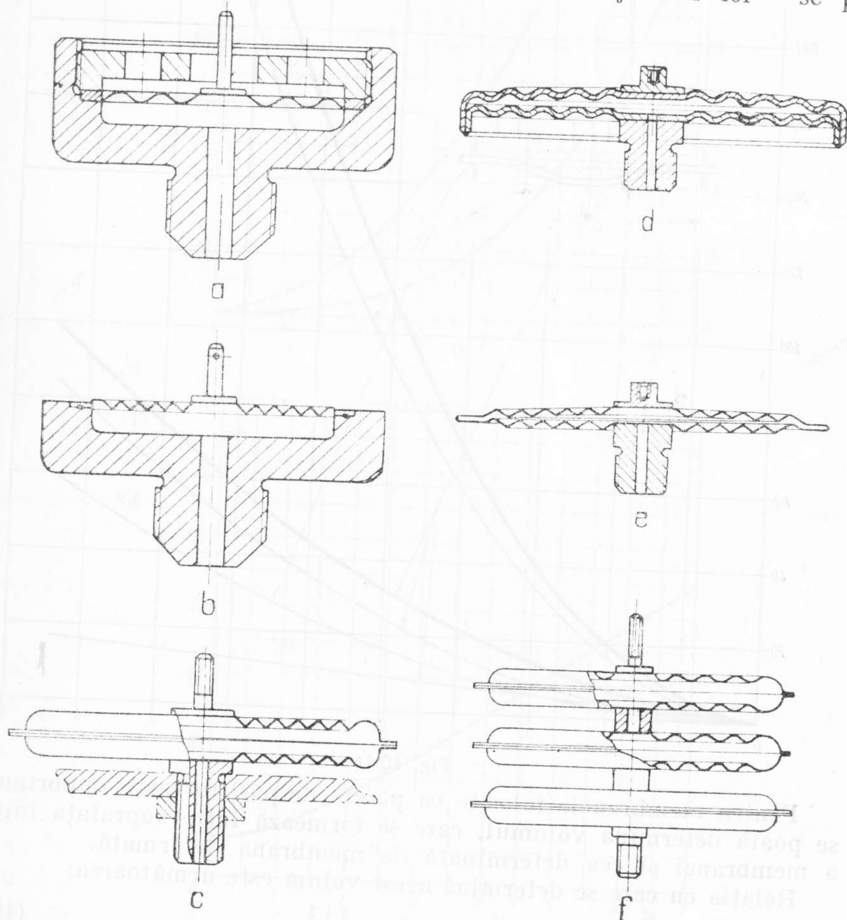


Fig. 10.17



realiza caracteristici de lucru convenabile, corespunzătoare cerințelor aparatelor în care sînt utilizate.

Membranele ondulate se pot clasifica după forma ondulațiilor, după modul lor de prindere la conturul exterior, după forma centrului discului, precum și după modul în care aceste membrane apar într-un singur exemplar, ca o singură membrană sau sînt prinse cîte două sub forma unei capsule sau grup de capsule. Membranele singulare se fixează pe un guler la corpul aparatului prin lipire sau prin sudare (fig. 10.17, *a*), sau prin prinderea printr-un sistem de încastrare (fig. 10.17, *b*). Membranele grupate sub formă de capsule, ca în fig. 10.17, *c*, *d* și *e*, sînt mai des utilizate, deoarece au o cursă de două ori mai mare și realizarea constructivă este mai ușoară.

Pentru a realiza deplasări mari se pot grupa mai multe capsule (fig. 10.17, *f*).

După forma ondulațiilor, membranele pot fi cu profil mărunt, în formă de pilă (fig. 10.18, *a*) și în formă toroidală (fig. 10.18, *e*) și membrane cu profil cu adîncime mare, de forme: triunghiulară (fig. 10.18, *b*), trapezoidală (fig. 10.18, *c*), sinusoidală (fig. 10.18, *d*), sau membrane cu profiluri de adîncime variabilă (fig. 10.18, *f*).

O importanță deosebită asupra comportării membranelor o are modul de prindere al acestora pe conturul exterior. Din acest punct de vedere se deosebesc membrane ondulate obișnuite și membrane cu ondulație marginală.

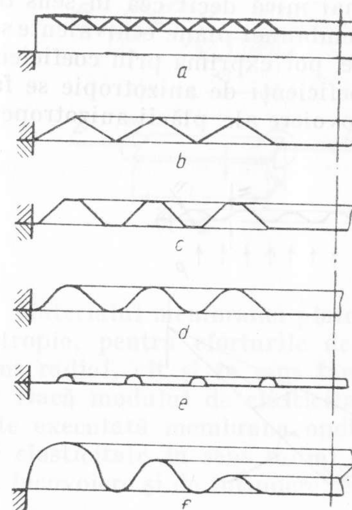


Fig. 10.18

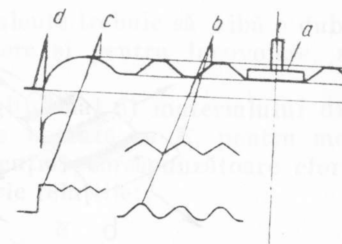



Fig. 10.19

În fig. 10.19 este reprezentată schematic o membrană cu ondulaţie marginală în formă de arc de cerc. Ondulaţia marginală influenţează foarte mult forma caracteristicii membranei. În figură sînt reprezentate elementul de fixare axial al membranei (*a*), diverse forme de ondulaţie (*b*), de ondulaţii marginale (*c*) şi de margini de montaj (*d*).

### 10.3.2. Consideraţii teoretice şi de calcul

Membranele ondulate se calculează pe baza metodelor de calcul cunoscute pentru piesele în formă de învelişuri subţiri flexibile axial-simetrice. Calculul acestor plăci este în general foarte laborios. Metoda de calcul folosită curent în literatură tehnică modernă a fost stabilită de L. E. Andreeva şi constă în înlocuirea membranei ondulate printr-o membrană plană anizotropă. Această metodă porneşte de la observaţia că rigiditatea la întindere şi la încovoiere a unui element din membrană în sens radial diferă de rigiditatea sa în sens tangenţial (circular), şi anume, rigiditatea în sens radial este mai mică decît cea în sens tangenţial. Proprietăţile anizotropice ale membranei plane echivalente sînt condiţionate de forma ei geometrică şi se pot exprima prin coeficienţii de anizotropie. Determinarea acestor coeficienţi de anizotropie se face egalînd rigidităţile la întindere şi la încovoiere ale plăcii anizotrope cu

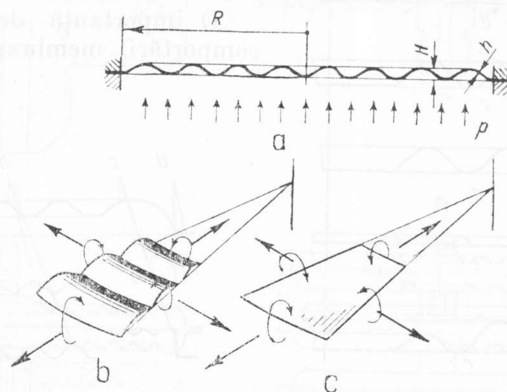



Fig. 10.20

rigidităţile respective ale membranei ondulate, avînd în vedere ca grosimile celor două membrane să fie egale. Un element de membrană ondulată este solicitat simultan la întindere şi la încovoiere atît în



sens radial, cît şi în sens tangenţial. În fig. 10.20, *a* este reprezentată schematic o membrană; în fig. 10.20, *b* un element de membrană ondulată, cum şi solicitările la care este supus; în fig. 10.20, *c* — elementul de membrană plan anizotrop echivalent şi încărcarea echivalentă.

Pentru determinarea coeficienţilor de anizotropie se ia o fîşie tăiată în lungul razei membranei gofrate şi o fîşie tăiată la fel din membrana plană echivalentă anizotropă şi se egalează alungirile sub acţiunea aceleiaşi forţe de întindere.

În fig. 10.21 sînt reprezentate schematic aceste fîşii şi modul de încărcare al lor.

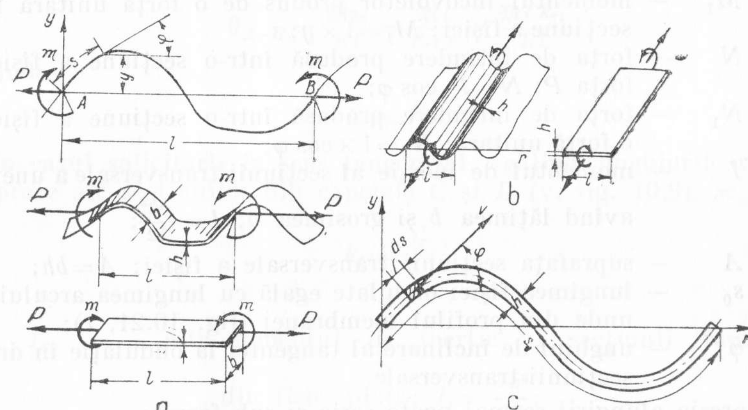



Fig. 10.21

Materialul membranei plate echivalente trebuie să aibă o dublă anizotropie, pentru eforturile de întindere şi pentru încovoiere, atît în sens radial, cît şi în sens tangenţial.

Dacă modulul de elasticitate longitudinal al materialului din care este executată membrana ondulată se notează cu $E$, pentru modulele de elasticitate în sens radial şi tangenţial corespunzătoare eforturilor de încovoiere şi de întindere se pot scrie relaţiile:

$$E_{rt} = \frac{E}{k_{rt}};\ E_{ri} = \frac{E}{k_{ri}};$$

$$E_{tt} = k_{tt}E;\quad E_{ti} = k_{ti} \cdot E, \qquad (10.47)$$

unde $E_{rt}$ şi $E_{tt}$ sînt modulele radial şi tangenţial corespunzătoare tracţiunii, iar $E_{ri}$ şi $E_{ti}$, cele corespunzătoare încovoierii.

În aceste relații coeficienții $k$ sînt supraunitari.

În caz că elementul de membrană sub formă de fișie este întins cu o forță $P$ în sens radial (fig. 10.21, *a*), alungirea fișiei $AB$, concretizată prin deplasarea capătului $B$ în direcția forței $P$, este:

$$\delta_{AB}=\int_0^{s_0}\frac{MM_1}{EI}ds+\int_0^{s_0}\frac{NN_1}{EA}ds, \qquad (10.48)$$

unde: $M$ este momentul încovoietor produs de forța $P$ într-o secțiune a fișiei: $M=Py$;

$M_1$ — momentul încovoietor produs de o forță unitară într-o secțiune a fișiei; $M_1=1\times y$;

$N$ — forța de întindere produsă într-o secțiune a fișiei de forța $P$; $N=P\cos\varphi$;

$N_1$ — forța de întindere produsă într-o secțiune a fișiei de o forță unitară; $N_1=1\times\cos\varphi$;

$I$ — momentul de inerție al secțiunii transversale a unei fișii avînd lățimea $b$ și grosimea $h$; $I=\frac{bh^3}{12}$;

$A$ — suprafața secțiunii transversale a fișiei; $A=bh$;

$s_0$ — lungimea fișiei ondulate egală cu lungimea arcului unei unde din profilul membranei (fig. 10.21, *c*);

$\varphi$ — unghiul de înclinare al tangentei la ondulație în dreptul secțiunii transversale.

Expresia alungirii se mai poate scrie și sub forma:

$$\delta_{AB}=\frac{P}{EI}\int_0^{s_0}y^2\,ds+\frac{P}{EA}\int_0^{s_0}\cos^2\varphi\,ds. \qquad (10.49)$$

Pentru fișia din membrana echivalentă anizotropă supusă la întindere de aceeași forță $P$, expresia alungirii este următoarea:

$$\delta_{AB}=\frac{Pl}{E_{rt}A}=\frac{Plk_{rt}}{EA}, \qquad (10.50)$$

unde: $l$ este lungimea echivalentă, egală cu lungimea undei profilului membranei ondulate.

Egalînd relațiile alungirilor se obține:

$$k_{rt}=\frac{12}{h^2l}\int_0^{s_0}y^2\,ds+\frac{1}{l}\int_0^{s_0}\cos^2\varphi\,ds. \qquad (10.51)$$



Dacă se egalează alungirile fișiilor tăiate și întinse în sens tangențial (fig. 10.21, *b*) se obține coeficientul de anizotropie

$$k_{tt}=\frac{s_0}{l}. \qquad (10.52)$$

În mod asemănător se determină coeficienții de anizotropie corespunzători pentru încovoiere, solicitînd fișiile membranei ondulate și ale membranei echivalente plate anizotrope la încovoiere.

Din egalarea unghiurilor de rotire reciprocă a secțiunilor din $A$ și $B$ în cazul solicitării în sens radial se obține:

$$\theta_{A-B}=\frac{\mathfrak{M}s_0}{EI}=\frac{\mathfrak{M}l}{E_{ri}I}=\frac{\mathfrak{M}l\,k_{ri}}{EI}, \qquad (10.53)$$

de unde

$$k_{ri}=\frac{s_0}{l}. \qquad (10.54)$$

În cazul solicitării în sens tangențial, egalînd unghiurile rotirilor reciproce ale secțiunilor din capetele $C$ și $D$ (v. fig. 10.9), se obține:

$$k_{ti}=\frac{I'_r}{I_r}; \qquad (10.55)$$

unde:

$I_r$ este momentul de inerție al secțiunii transversale din fișie plată; $I_r=\frac{bh^3}{12}$;

$I'_r$ — momentul de inerție al secțiunii transversale a unei fișii ondulate, în raport cu raza $r$;

$$I'_r=h\int_0^{s_0}y^2\,ds+\frac{h^3}{12}\int_0^{s_0}\cos^2\varphi\,ds. \qquad (10.56)$$

Înlocuind se obține:

$$k_{ti}=\frac{I'_r}{I_r}=\frac{12}{h^2l}\int_0^{s_0}y^2\,ds+\frac{1}{l}\int_0^{s_0}\cos^2\varphi ds=k_{tt}. \qquad (10.57)$$

Se observă că cei patru coeficienți de anizotropie se reduc în fond la doi, și anume:

$$k_{tt}=k_{ri}=k_1=\frac{s_0}{l};$$

$$k_{rt}=k_{ti}=k_2=\frac{12}{h^2l}\int_0^{s_0}y^2\,ds+\frac{1}{l}\int_0^{s_0}\cos^2\varphi\,ds. \qquad (10.58)$$

De regulă, valorile acestor coeficienţi sînt calculate şi date în tabele, în funcţie de elementele geometrice ale membranei ondulate.

Pentru a stabili ecuaţiile de legătură între eforturi unitare şi deformaţii se pot scrie pe baza legii lui Hooke, pentru întindere şi încovoiere, relaţiile:

$$\varepsilon_{rt}=\frac{\sigma_{rt}}{E_{rt}}-\mu_{tt}\frac{\sigma_{tt}}{E_{tt}};$$

$$\varepsilon_{tt}=\frac{\sigma_{tt}}{E_{tt}}-\mu_{rt}\frac{\sigma_{rt}}{E_{rt}};\tag{10.59}$$

$$\varepsilon_{ri}=\frac{\sigma_{ri}}{E_{ri}}-\mu_{ti}\frac{\sigma_{ti}}{E_{ri}};$$

$$\varepsilon_{ti}=\frac{\sigma_{ti}}{E_{ti}}-\mu_{ri}\frac{\sigma_{ri}}{E_{ri}}.$$

Deoarece întinderea în sens tangenţial a unei membrane este egală cu scurtarea relativă în sens radial se poate scrie:

$$\mu_{tt}=\mu_{ti}=\mu \text{ (coeficientul lui Poisson).}$$

Pentru materialele anizotrope, în conformitate cu legea lui Hooke, sînt valabile relaţiile:

$$\frac{\mu_{tt}}{E_{tt}}=\frac{\mu_{rt}}{E_{rt}} \text{ şi } \frac{\mu_{ti}}{E_{ti}}=\frac{\mu_{ri}}{E_{ri}}.\tag{10.60}$$

Pe baza acestor relaţii se poate scrie:

$$\varepsilon_{rt}=\frac{k_2}{E}\left[\sigma_{rt}-\frac{\mu}{k_1 k_2}\sigma_{tt}\right];$$

$$\varepsilon_{tt}=\frac{1}{k_i E}\left[\sigma_{tt}-\mu\sigma_{rt}\right];$$

$$\varepsilon_{ri}=\frac{k_1}{E}\left[\sigma_{ri}-\frac{\mu}{k_1 k_2}\sigma_{ti}\right];\tag{10.61}$$

$$\varepsilon_{ti}=\frac{1}{k_2 E}\left[\sigma_{ti}-\mu\sigma_{ri}\right].$$

Dacă se notează cu $N_r$ şi $N_t$ forţele de întindere, pe unitatea de lungime a secţiunii, care acţionează în sens radial sau în sens tangenţial şi ştiind că:

$$\sigma_{rt}=\frac{N_r}{h} \text{ şi } \sigma_{tt}=\frac{N_t}{h},\tag{10.62}$$

$h$ fiind grosimea membranei, se poate scrie:

$$\varepsilon_{rt}=\frac{k_2}{Eh}\left[N_r-\frac{\mu}{k_1 k_2}N_t\right];$$
$$\varepsilon_{tt}=\frac{1}{k_1 Eh}\left[N_t-N_r\right]. \tag{10.63}$$

Notînd cu $\theta$ unghiul de rotire al normalei față de planul median al plăcii în funcție de raza punctului și cu $r$ raza (fig. 10.9) și ținînd seamă de ecuațiile diferențiale ale plăcilor plane, ecuația plăcii plane anizotrope echivalente este următoarea:

$$-r(N_r r)''-(N_r r)'+k_1 k_2 N_r=E h k_1\frac{\theta^2}{2}, \tag{10.64}$$

unde derivatele sînt făcute în funcție de $\rho=\frac{r}{R}$.

Pe baza relațiilor (10.2) și (10.3), care dau valoarea deformațiilor datorită încovoierii, se obține:

$$\sigma_{ri}=\frac{E z}{k_i\left(1-\frac{\mu^2}{k_1 k_2}\right)}\left(\theta'+\mu\frac{\theta}{r}\right);$$
$$\sigma_{ti}=\frac{k_2 E z}{1-\frac{\mu^2}{k_1 k_2}}\left(\frac{\theta}{r}+\frac{\mu}{k_1 k_2}\theta'\right); \tag{10.65}$$

$$M_r=\frac{D_a}{k_1}\left(\theta'+\mu\frac{\theta}{r}\right);$$
$$M_t=K_2 D_a\frac{\theta}{r}+\frac{\mu}{k_1 k_2}\theta', \tag{10.66}$$

unde $D_a$ este rigiditatea învelișului anizotrop;

$$D_a=\frac{E h^3}{12\left[1-\frac{\mu^2}{k_1 k_2}\right]}. \tag{10.67}$$

Folosind ecuațiile de echilibru pentru plăcile plate, pentru placa anizotropă se obține ecuația diferențială:

$$r\theta''+\theta'-k_1 k_2\frac{\theta}{r}=\frac{k_1}{D_a}N_r r\,\theta+\frac{k_1 p r^2}{2 D_a}. \tag{10.68}$$

Dacă se introduc notațiile:

$$\psi=\frac{N_r\, r}{E\, h\, R\, k_1};\quad D_a=\frac{E\, h^3}{12\left(1-\frac{\mu^2}{\alpha^2}\right)};\quad \alpha^2=k_1\, k_2;\quad \rho=\frac{r}{R},\qquad (10.69)$$

ecuațiile diferențiale (10.64) și (10.68) devin:

$$\rho\psi''+\psi'-\alpha^2\frac{\psi}{\rho}=\frac{\theta^2}{2};$$
$$\rho\theta''+\theta'-\alpha^2\frac{\theta}{\rho}=\frac{R^2 k_1}{D_a}\left[-E\, h\, k_1\,\psi\theta+\frac{ph}{2}\rho^2\right].\qquad (10.70)$$

Aceste ecuații diferențiale constituie punctul de plecare pentru determinarea atît a caracteristicilor membranelor ondulate, cît și ale celor plate.

Se poate observa că dacă membrana este plată, atunci $k_1=k_2=\alpha^2=1$ și ecuațiile diferențiale precedente devin ecuațiile obișnuite ale unei membrane plate (10.28).

Ecuațiile diferențiale (10.70) ale membranei ondulate se rezolvă prin aproximații, în mod asemănător ca la membrana plată, și din integrarea lor se obține ecuația caracteristicii membranei. Ecuația caracteristicii se compune din doi termeni, în care într-unul apare săgeata la puterea întîi și în altul la puterea a treia. Termenul care conține săgeata la puterea întîi corespunde săgeților mici ale membranei, în care solicitarea importantă, predominantă, este cea de încovoiere, cea de întindere fiind neglijabilă. Rezultă că pentru determinarea acestui termen se poate neglija solicitarea la întindere, adică funcția efortului de întindere se poate considera nulă, $\psi=0$.

Pentru determinarea termenului care conține săgeata la puterea a treia și care corespunde săgeților mari, în care solicitarea predominantă asupra membranei este cea de întindere, iar cea la încovoiere este neglijabilă, se poate considera membrana absolut elastică, adică cu rigiditate nulă, $D=0$.

Prin rezolvarea ecuației diferențiale în cele două situații separat se ajunge la ecuația caracteristicii:

$$\frac{p\, R^4}{E\, h^4}=\frac{2\,(3+\alpha)\,(1+\alpha)}{3k_1\left(1-\frac{\mu^2}{\alpha^2}\right)}\left(\frac{w_0}{h}\right)+$$
$$+\frac{32}{9-\alpha^2}\left[\frac{1}{6}-\frac{3-\mu}{(\alpha-\mu)\,(\alpha+3)}\right]\left(\frac{w_0}{h}\right)^3.\qquad (10.71)$$



sau

$$\frac{p\, R^4}{E\, h^4}=a\,\frac{w_0}{h}+b\,\frac{w_0^3}{h^3},\qquad (10.72)$$

unde

$$a=\frac{2\,(3+\alpha)\,(1+\alpha)}{3k_1\left(1-\frac{\mu^2}{\alpha^2}\right)}\quad \text{și}\quad b=\frac{32}{9-\alpha^2}\left[\frac{1}{6}-\frac{3-\mu}{(\alpha-\mu)\,(\alpha+3)}\right].$$

Valorile coeficienților $a$ și $b$, pentru diferite situații, sînt calculate în diagramele din fig. 10.22 $a$—$d$, în funcție de adîncimea relativă a ondulației $\frac{H}{h}$, de unghiul de înclinare $\varphi'$ pentru profilul triunghiular mărunt, sau în funcție de raportul $\frac{H}{l}$ în cazul ondulației sinusoidale ($H$ este adîncimea profilului).

Ecuația caracteristicii se mai poate pune și sub forma:

$$p=\frac{E\, h^3 a}{R^4}\,w_0+\frac{E\, h\, b}{R^4}\,w_0^3\ \text{sau}\qquad (10.73)$$

$$p=Aw_0+B\,w_0^3\qquad (10.74)$$

unde

$$A=\frac{E\, h^3 a}{R^4}\quad \text{și}\quad B=\frac{E\, h\, b}{R^4}.$$

Eliminînd grosimea $h$ din aceste relații, se obține:

$$\frac{a}{b^3}=\frac{A}{B^3}\left(\frac{E}{R^4}\right)^2,\qquad (10.75)$$

relație importantă la proiectarea membranelor.

Modulul de elasticitate $E$ și raza $R$ se stabilesc o dată cu alegerea materialului și a condițiilor de gabarit, iar coeficienții $a$ și $b$ se determină alegînd forma geometrică a profilului în funcție de raportul $\frac{H}{h}$. Pentru ușurarea calculelor de proiectare raportul $\frac{a}{b^3}$ se dă în diagramele din fig. 10.23 $a$—$d$, în funcție de diferite valori ale raportului $\frac{H}{h}$. După determinarea raportului $\frac{a}{b^3}$ și a coeficienților $a$ și $b$ din diagramele amintite, în funcție de raportul $\frac{H}{h}$ se determină — cu ajutorul relațiilor precedente — coeficienții $A$ și $B$ și grosimea $h$ a membranei.

*Tabela 10.1*

**Relaţiile de calcul ale caracteristicilor membranelor ondulate cu centru rigid şi coeficienţii corespunzători de corecţie**

| | Sarcina uniform distribuită | | | | Sarcină concentrată | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\frac{pR^4}{Eh^4}=\eta_1 a_1 \frac{w_0}{h}+\xi_1 b_1 \frac{w_0^3}{h^3}$ | | | | $\frac{PR^2}{\pi Eh^4}=\eta_2 a_2 \frac{w_0}{h}+\xi_2 b_2 \frac{w_0^3}{h^3}$ | | | |
| $\alpha=\sqrt{k_1 k_2}$ \\ $\rho_0\frac{r_0}{R}$ | $\eta_1$ | | | | $\eta_2$ | | | |
| | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 |
| 2 | 1,10 | 1,68 | 4,25 | 28,3 | 1,32 | 2,72 | 9,04 | 76,2 |
| 4 | 1,01 | 1,22 | 2,33 | 12,8 | 1,12 | 1,69 | 4,17 | 29,0 |
| 6 | 1,01 | 1,11 | 1,75 | 7,77 | 1,08 | 1,45 | 2,89 | 16,2 |
| 8 | 1,00 | 1,08 | 1,52 | 5,53 | 1,07 | 1,36 | 2,39 | 10,9 |
| 10 | 1,00 | 1,06 | 1,40 | 4,34 | 1,06 | 1,31 | 2,15 | 8,31 |
| 12 | 1,00 | 1,05 | 1,34 | 3,64 | 1,06 | 1,29 | 2,01 | 6,81 |
| 16 | 1,00 | 1,04 | 1,27 | 2,90 | 1,05 | 1,26 | 1,86 | 5,25 |
| | $\xi_1$ | | | | $\xi_2$ | | | |
| 2 | 1,14 | 1,89 | 5,21 | 36,7 | 2,36 | 6,69 | 26,2 | 237 |
| 4 | 1,13 | 1,75 | 4,46 | 30,6 | 2,35 | 6,52 | 25,3 | 229 |
| 6 | 1,13 | 1,73 | 4,28 | 28,7 | 2,34 | 6,49 | 25,1 | 227 |
| 8 | 1,13 | 1,73 | 4,22 | 27,9 | 2,34 | 6,49 | 25,0 | 226 |
| 10 | 1,13 | 1,72 | 4,20 | 27,4 | 2,34 | 6,48 | 25,0 | 226 |
| 12 | 1,13 | 1,72 | 4,20 | 27,2 | 2,34 | 6,48 | 25,0 | 225 |
| 16 | 1,13 | 1,72 | 4,18 | 27,0 | 2,34 | 6,48 | 25,0 | 225 |



### 10.3.3. Membrane ondulate cu centru rigid

La majoritatea aparatelor la care se utilizează membrane ondulate pentru transmiterea deplasării la mecanismul indicator este necesar ca centrul membranei să fie de formă plată. În acest scop, în partea centrală a membranei se lipeşte sau se sudează un disc metalic plat denumit centru rigid (v. fig. 10.19). Sarcina care acţionează asupra membranei poate fi uniform distribuită sau concentrată în mijlocul plăcii care constituie centrul rigid.

Relaţiile de calcul pentru caracteristicile membranelor sînt, în acest caz, asemănătoare cuprinzînd nişte coeficienţi de corecţie. În tabela 10.1 se dau relaţiile de calcul şi valorile coeficienţilor de corecţie $\eta$ şi $\xi$ pentru cazul sarcinii uniform distribuite şi pentru cazul sarcinii concentrate.

## 10.4. Membrane pocnitoare

Prin membrană pocnitoare se înţelege o calotă sferică sau o membrană conică de forma unui înveliş subţire, solicitată de o presiune sau de o forţă concentrată la partea convexă. Sub acţiunea acestei sarcini săgeata membranei creşte lent pînă la o valoare a presiunii denumită presiune critică, după care îşi schimbă săgeata printr-un salt. Această schimbare a săgeţii prin salt constituie în fond o pierdere de stabilitate a membranei, care se realizează cu păstrarea proprietăţilor elastice ale materialului.

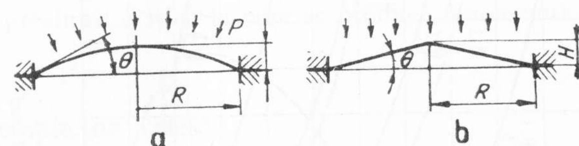



Fig. 10.24

Dacă fenomenul de pierdere a stabilităţii nu este urmat de o degradare a membranei, el poartă numele de pocnire, iar membrana se numeşte membrană pocnitoare.

În fig. 10.24, *a* se arată schematic forma unei astfel de membrane pocnitoare în formă de calotă sferică.

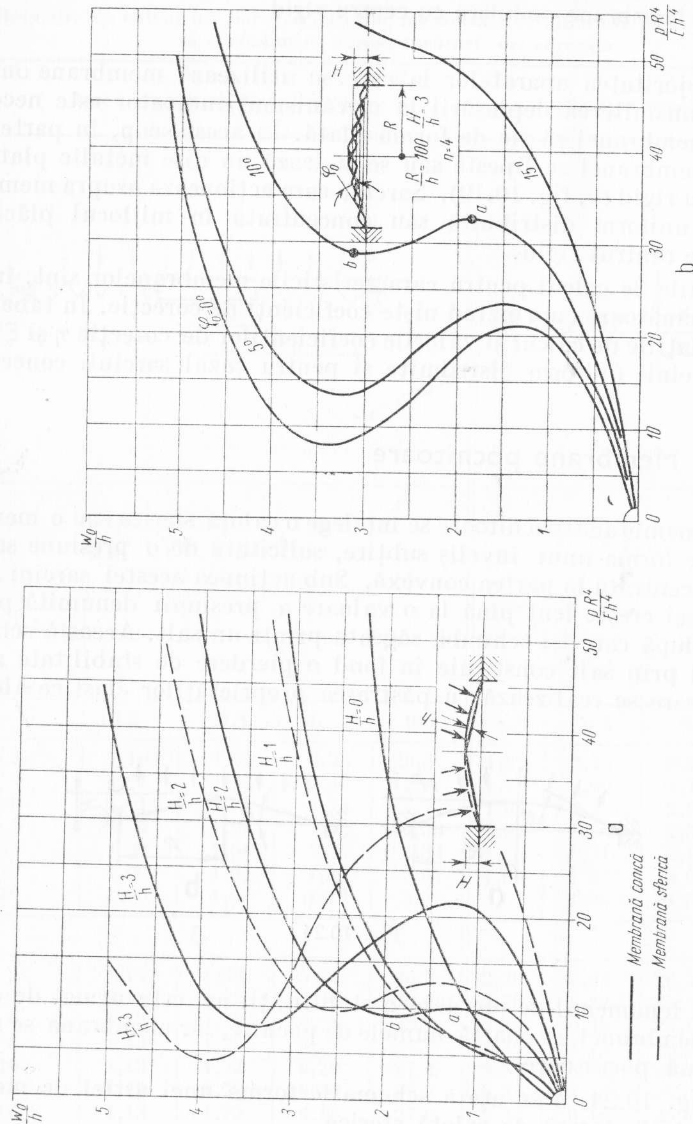



Fig. 10.25



Ecuaţia caracteristicii membranei pocnitoare în formă de calotă sferică, în cazul uzual al încastrării perfecte a conturului, este următoarea:

$$\frac{pR^4}{Eh^4}=\left(\frac{8}{15}\,\frac{7-2\mu}{1-\mu}\,\frac{H^2}{h}+\frac{16}{3\,(1-\mu^2)}\right)\frac{w_0}{h}-2\,\frac{3-\mu}{1-\mu}\,\frac{H}{h}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3+\frac{2}{21}\,\frac{23-9\mu}{1-\mu}\left(\frac{w_0}{h}\right)^3 \quad (10.76)$$

sau pentru $\mu=0,3$:

$$\frac{pR^4}{Eh^4}=\left(4,88\,\frac{H^2}{h^2}+5,86\right)\frac{w_0}{h}\pm 7,72\,\frac{H}{h}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2+2,76\left(\frac{w_0}{h}\right)^3. \quad (10.77)$$

Pentru membrana conică (fig. 10.24, *b*), ecuaţia caracteristicii este următoarea:

$$\frac{pR^4}{Eh^4}=\left(3,46\,\frac{H^2}{h^2}+5,86\right)\frac{w_0}{h}\pm 6,52\,\frac{H}{h}\left(\frac{w_0}{h}\right)^2+2,76\left(\frac{w_0}{h}\right)^2. \quad (10.78)$$

Semnul plus corespunde solicitării membranei din partea convexă, iar minus — din partea concavă.

Formele acestor caracteristici sînt reprezentate în fig. 10.25, *a* în funcţie de raportul $\frac{H}{h}$. În fig. 10.25, *b* este reprezentată caracteristica membranei ondulate conice.

Pentru a determina condiţiile în care apare fenomenul de pierdere a stabilităţii (pocnirea membranei), se derivează ecuaţia caracteristicii în raport cu $\frac{w_0}{h}$ şi se anulează derivata obţinută.

Rezolvînd ecuaţia obţinută în raport cu $\frac{w_0}{h}$ se determină valoarea critică a raportului $\frac{H}{h}$, care determină apariţia pocnirii membranei şi apoi valoarea presiunii critice la care se produce fenomenul de pierdere a stabilităţii.

## 10.5. Exemple de calcul

**Exemplu de calcul 1.** O membrană despărţitoare are următoarele date caracteristice:

raza de lucru (activă) $R=90$ mm;
grosimea membranei $h=0,35$ mm;
modulul de elasticitate al materialului $E=2,1\times10^6$ kgf/cm²;
limita de curgere $\sigma_c=8\ 000$ kgf/cm²;
săgeata de lucru $w_0=1,75$ mm.

Să se determine căderea de presiune, variația de volum și efortul radial maxim, și ecuația suprafeței elastice.

*Rezolvare.* Folosind diagrama din fig. 10.15 se determină mărimile $\frac{pR^4}{Eh^4}$ și $z$, în funcție de raportul $\frac{w_0}{h} = \frac{1{,}75}{0{,}35} = 5$.

Rezultă: $\frac{pR^4}{Eh^4} = 450$; $z = 16$.

Căderea de presiune

$$p = \frac{450\,Eh^4}{R^4} = \frac{450 \times 2{,}1 \times 10^6 \times 0{,}035^4}{9^4} \approx 0{,}210\ \text{kgf/cm}^2.$$

Ecuația suprafeței elastice a membranei, pentru săgeata $w_0 = 1{,}75$ mm:

$$w = w_0 \left\{ \frac{1}{16-1} \left[ 2\rho^{16+1} - (16+1)\rho^2 \right] + 1 \right\}$$

sau

$$w = w_0 \left[ \frac{1{,}75}{15} \left( \frac{r}{R} \right)^{17} - \frac{17}{15} \left( \frac{r}{R} \right)^2 + 1 \right].$$

$$V = \pi R^2 w_0 \frac{z+1}{2(z+3)} = \pi \times 9^2 \times 0{,}175 \times \frac{16+1}{2\,(16+3)} = 20\ \text{cm}^3.$$

Efortul radial maxim se obține folosind diagrama din fig. 10.15. Pentru $\frac{w_0}{h} = 5$, se obține:

$$\frac{\sigma_r R}{Eh^2} = 108.$$

Rezultă

$$\sigma_r = \frac{108 Eh^2}{R^2} = \frac{108 \times 2{,}1 \times 10^6\,(0{,}035)^2}{9^2} \approx$$

$$\approx 3\,400\ \text{kgf/cm}^2.$$

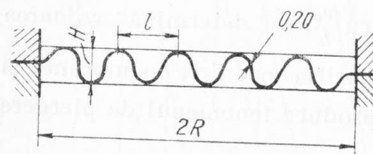



Fig. 10.26

**Exemplu de calcul 2.** O membrană cu profil sinusoidal are dimensiunile (fig. 10.26): $2R = 50$ mm; $H = 0{,}80$ mm; $l = 6{,}8$ mm. Modulul de elasticitate $E = 1 \times 10^6$ kgf/cm².

Să se determine ecuația caracteristicii membranei.

*Rezolvare.* Ecuația caracteristicii se poate pune sub forma:

$$p = \frac{Eh}{R^4}\,(a\,h^2 w_0 + b w_0^3).$$



Din diagrama din fig. 10.22, *b* folosind parametrii:

$$\frac{H}{h} = \frac{0{,}80}{0{,}20} = 4 \quad \text{și} \quad \frac{H}{l} = \frac{0{,}80}{6{,}8} = 0{,}1176,$$

se determină:

$$a = 38; \quad b = 0{,}19.$$

Înlocuind în ecuația caracteristicii se obține:

$$p = \frac{1 \times 10^4 \times 0{,}20}{(25)^4} \left[ 38 \times 0{,}20^2 w_0 + \right.$$

$$\left. + 0{,}19\, w_0^3 \right].$$

Efectuînd calculele rezultă:

$$p = 1{,}1 w_0 + 1{,}07 w_0^3.$$

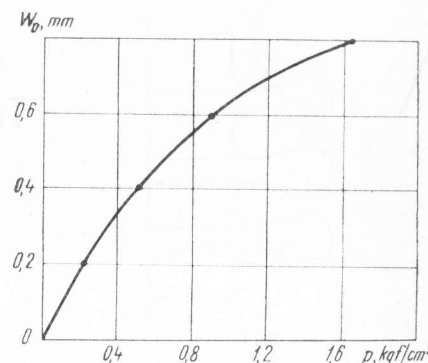



Fig. 10.27

Caracteristica membranei se construiește prin puncte, dînd valori, de exemplu, lui $w_0$:

| $w_0$ mm | $1{,}1\,w_0$ | $w_0^3$ | $1{,}07\,w_0$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,2 | 0,22 | 0,008 | 0,00856 | 0,22856 |
| 0,4 | 0,44 | 0,064 | 0,0685 | 0,5085 |
| 0,6 | 0,66 | 0,216 | 0,231 | 0,891 |
| 0,8 | 0,88 | 0,512 | 0,548 | 1,628 |

În fig. 10.27 este reprezentată caracteristica membranei.

# 11

# Tuburi ondulate (silfoane)

## 11.1. Generalități

Tubul ondulat, denumit și silfon, este un înveliș de revoluție cu pereți subțiri, ondulat transversal, care se deformează elastic sub sarcini axiale și acumulează lucru mecanic (fig. 11.1). Dacă i se aplică o forță transversală, care produce momente de încovoiere, silfonul primește deplasări corespunzătoare în planul axial.

Profilul ondulațiilor se caracterizează prin unghiul de înclinare $\alpha$, distanța $a$ între ondulații, diametrale: exterior $D_e$; interior, $D_i$ și mediu $D$. Profilul ondulațiilor în funcție de condițiile de funcționare ale tubului ondulat variază astfel:

a) în caz că tubul lucrează la întindere, profilul se execută cu inflexiune (fig. 11.2);

b) pentru compresiune se utilizează un profil cu flancurile drepte (fig. 11.3);

c) pentru sarcini repetate (oboseală), $\alpha=0$, flancurile sînt paralele (fig. 11.4);

d) în cazurile speciale se folosește tubul cu ondulație fără sfîrșit (fig. 11.5);

e) pentru a îmbunătăți caracteristica atît la întindere, cît și la compresiune se folosesc tuburi ondulate combinate cu arcuri elicoidale (fig. 11.6); în acest caz se realizează micșorarea efectului de histerezis;



f) pentru a proteja tubul ondulat împotriva suprapresiunilor se folosește metoda armării sale cu inele exterioare (fig. 11.7).

Un tub ondulat se caracterizează prin săgeată, rigiditate, presiune maximă admisă, arie efectivă.

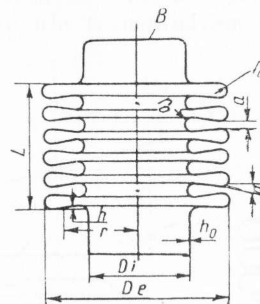



Fig. 11.1

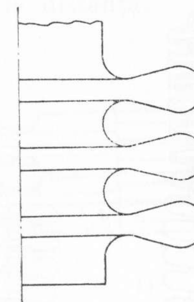


Fig. 11.2

Prin arie efectivă se înțelege raportul dintre forța concentrată $P$ și presiunea $p$, care dau aceeași săgeată.

Presiunile interioare pentru care se folosesc tuburile ondulate variază în limite destul de largi. În construcția de aparate și în diferite utilaje se folosesc tuburi ondulate cu diametre de la 7–10 pînă la 120–150 mm și cu grosimea peretelui de 0,08–0,3 mm.

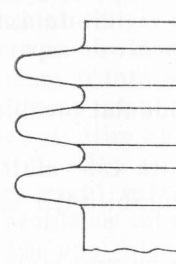


Fig. 11.3

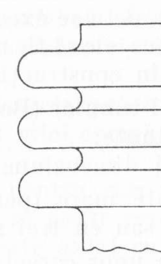


Fig. 11.4

Sensibilitatea silfoanelor de diametru mare și pereți subțiri este foarte mare, astfel că aceste silfoane pot fi utilizate pentru presiuni de ordinul zecimilor de milimetru coloană de apă. În schimb, silfoanele de diametru mic și cu pereți groși pot lucra la presiuni de sute de atmosfere.

Tuburile ondulate fiind de fapt arcuri foarte sensibile, se folosesc ca elemente elastice manometrice în construcţia aparatelor de precizie ca: manometre, termometre manometrice, manometre diferenţiale, aparatură manometrică de reglare etc.

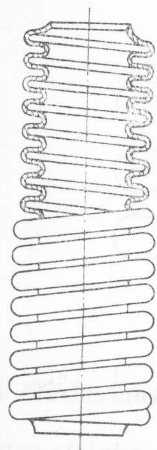


Fig. 11.5

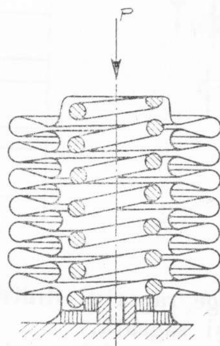



Fig. 11.6

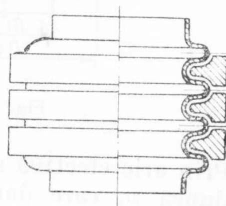


Fig. 11.7

De asemenea, tubul ondulat poate fi folosit ca mijloc de etanşare fără garnitură.

Posibilitatea de a se executa silfoane cu rigiditate axială şi de încovoiere mică face ca ele să fie utilizate ca elemente de separare şi de ieşire, fără garnituri, în construcţia aparatelor.

Faţă de arcul tubular (Bourdon), tubul ondulat prezintă următoarele avantaje importante:

— la aceeaşi dimensiune, forţa dezvoltată este mult mai mare;

— durabilitate mare (pentru mărirea durabilităţii se pot construi tuburi cu două sau cu trei straturi);

— îmbinarea unor caracteristici ridicate cu rezistenţa la coroziune; pentru funcţionare în condiţii de coroziune se folosesc două tuburi ondulate: tubul exterior este executat dintr-un material cu proprietăţi elastice înalte, iar cel interior dintr-un material rezistent în condiţiile date de coroziune;

— histerezis mic (pentru a micşora şi mai mult efectul de histerezis se foloseşte tubul ondulat combinat cu arc elicoidal).



Deoarece tuburile ondulate pot dezvolta eforturi de tracţiune mari, asigurînd aparatelor un mic prag de sensibilitate, se utilizează şi ca elemente în dispozitivele de acţionare.

Datorită variaţiei mari a volumului, tuburile ondulate se pot folosi şi ca elemente ale transmisiilor hidraulice la distanţă.

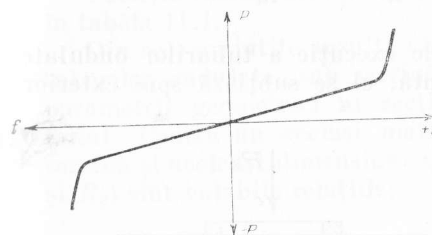



Fig. 11.8

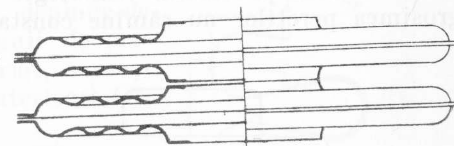


Fig. 11.9

Caracteristica tubului ondulat este liniară în anumite limite (fig.11.8), fie că sarcina este concentrată fie că tubul lucrează la presiune interioară.

Pentru a îmbunătăţi liniaritatea caracteristicii, în unele cazuri se procedează la gofrarea ondulaţiilor tubului, ca în fig. 11.9.

## 11.2. Consideraţii teoretice şi de calcul

Pentru determinarea rigidităţii axiale a tubului ondulat se asimilează o parte a gofrajului tubului cu o placă inelară, astfel că întreg tubul ondulat se compară cu un set de plăci inelare îmbinate rigid între ele pe contururile exterioare şi interioare.

Pentru simplificarea calculului se fac următoarele ipoteze:

— razele $r_0$ de rotunjire ale gofrajului sînt mici comparativ cu adîncimea ondulaţiei $R_e - R_i$;

— se consideră cazul tuburilor ondulate pentru care $\alpha = 0$.

În acest fel, problema tuburilor ondulate se poate rezolva prin asimilare cu problema unei plăci inelare încărcate axial cu o sarcină $P$. Deoarece tubul se poate asimila cu un set de astfel de plăci, săgeata tubului ondulat cu $n$ ondulaţii este de 2 $n$ ori mai mare decît săgeata unei plăci asimilate. În fig. 11.10 se dă schematic modul de asimilare a tubului cu plăci inelare.

Pentru săgeată se obţine relaţia:

$$f = 2nA_k \frac{PR_e^2}{Eh^3}. \quad (11.1)$$

Coeficientul $A_K$ este dat de relaţia:

$$A_K=\frac{3(1-\mu^2)}{4\pi}\left[\frac{e^2-1}{e^2}-\frac{4\ln^2 e}{e^2-1}\right],\qquad (11.2)$$

unde: $e$ este raportul de formă al silfonului; $e=\frac{R_e}{R_i}$;

$h$ — grosimea peretelui.

Din cauza procesului tehnologic de execuţie a tuburilor ondulate, grosimea pereţilor nu rămîne constantă, ci se subţiază spre exterior.

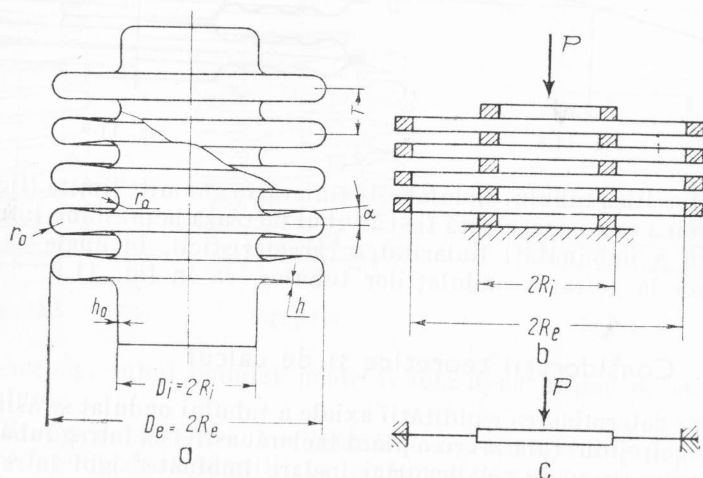



Fig. 11.10

Grosimea pereţilor într-un punct la distanţa $r$ de centrul tubului, se poate calcula cu relaţia:

$$h=h_0\frac{r}{R_i},\qquad (11.3)$$

unde: $h_0$ este grosimea semifabricatului din care este executat tubul ondulat;

$R_i$ — raza interioară a tubului.

Din fig. 11.11 reies grosimile tubului în punctele *1, 2, 3*.

$$h_1=h_0;\quad h_2=\frac{2R_i}{R_e+R_i};\quad h_3=h_0\frac{R_i}{R_e}.\qquad (11.4)$$



În relaţia săgeţii, $h^3$ are valoarea:

$$h^3=\frac{h_0^3}{3}\left[1+\left(\frac{2}{1+e}\right)^3+\frac{1}{e^3}\right].\qquad (11.5)$$

Valorile coeficientului $A_K$ sînt calculate, în funcţie de parametrul $e$, în tabela 11.1.

Din cele amintite rezultă că comportarea tuburilor ondulate, sub sarcină, depinde de parametrii geometrici ai secţiunii de material. Pentru un acelaşi material, aceeaşi sarcină şi aceleaşi dimensiuni exterioare ($R_i$ şi $R_e$) sînt valabile relaţiile:

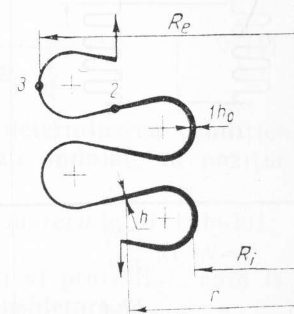



Fig. 11.11

$$\left.\begin{aligned}\frac{f_1}{f_2}&=\frac{n_1}{n_2},\\ \frac{f_1}{f_2}&=\frac{h_2^3}{h_1^3},\end{aligned}\right\}\qquad (11.6)$$

unde: $f_1$ şi $f_2$ sînt săgeţile;

$n_1$ şi $n_2$ — numărul ondulaţiilor active;

$h_1$ şi $h_2$ — grosimea pereţilor tuburilor.

Cînd tubul este acţionat de sarcini uniform distribuite (presiune interioară) pentru calcul aceste sarcini se înlocuiesc cu una concentrată, echivalentă. În acest caz se foloseşte şi noţiunea de suprafaţa efectivă.

Săgeata $f_1$, care ia naştere sub acţiunea presiunii $p$, şi $f_2$ care ia naştere sub acţiunea forţei concentrate, $P$ se determină cu relaţiile:

$$f_1=C_1p;\quad f_2=C_2P,\qquad (11.7)$$

unde coeficienţii $C_1$ şi $C_2$ sînt diferiţi ca dimensiuni:

Dacă $f_1=f_2$ rezultă:

$$C_1p=C_2P,\qquad (11.8)$$

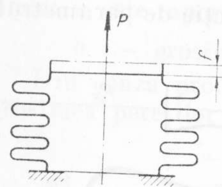
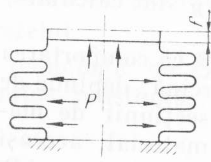
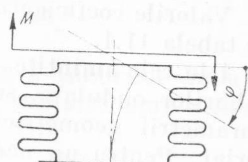
de unde:

$$\frac{P}{p}=\frac{C_1}{C_2}=A_{ef}\ \text{(arie efectivă)}.\qquad (11.9)$$

Din această relaţie se obţine:

$$P=pA_{ef}=p\pi R^2,\qquad (11.10)$$

**Relaţii pentru calculul tuburilor ondulate** *Tabela 11.1*

| | | |
|---|---|---|
|   |   |   |
| $f=2n\,A_K\,\dfrac{PR_i^2}{Eh^3}$<br>$\sigma_{ri}=B_{ki}\,\dfrac{Eh_if}{2n\,R_e^2}$<br>$\sigma_{re}=B_{ke}\,\dfrac{Eh_ef}{2nR_e^2}$ | $f=2nAq\,\dfrac{pR_e^4}{Eh^3}$<br>$\sigma_{ri}=Bq\,\dfrac{Eh_if}{2nR_e^2}$<br>$\sigma_{re}=Bq\,\dfrac{Eh_ef}{2nR_e^2}$ | $\varphi=2nA_r\,\dfrac{M}{Eh^3}$<br>$\sigma_{ri}=B_{ri}\,\dfrac{\varphi Eh_i}{2nR_e}$<br>$\sigma_{re}=B_{re}\,\dfrac{\varphi Eh_e}{2nR_e}$ |

| $e$ | $A_K$ | $B_{ki}$ | $B_{ke}$ | $A_q$ | $B_q$ | $A_r$ | $B_{re}$ | $B_{ri}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,10 | 0,000122 | 411 | 386 | 0,000326 | 399 | 0,000249 | 364 | 401 |
| 1,15 | 0,000344 | 202 | 184 | 0,000944 | 194 | 0,000782 | 170 | 195 |
| 1,20 | 0,000731 | 120 | 107 | 0,00193 | 119 | 0,001729 | 75,5 | 93,0 |
| 1,25 | 0,00129 | 88,9 | 76,6 | 0,00327 | 82,6 | 0,003154 | 66,5 | 83,1 |
| 1,30 | 0,00201 | 67,7 | 56,9 | 0,00493 | 62,1 | 0,00508 | 48,2 | 62,6 |
| 1,35 | 0,00290 | 54,4 | 44,6 | 0,00687 | 49,2 | 0,00755 | 36,8 | 49,7 |
| 1,40 | 0,00394 | 45,5 | 36,4 | 0,00905 | 40,6 | 0,01056 | 29,3 | 41,1 |
| 1,45 | 0,00510 | 39,0 | 30,5 | 0,0114 | 34,5 | 0,01408 | 24,1 | 34,9 |
| 1,50 | 0,00640 | 34,3 | 26,2 | 0,0139 | 29,9 | 0,01812 | 20,3 | 30,4 |
| 1,55 | 0,00782 | 30,6 | 22,9 | 0,0166 | 26,4 | 0,0226 | 17,4 | 26,9 |
| 1,60 | 0,00933 | 27,7 | 20,3 | 0,0193 | 23,7 | 0,0276 | 15,1 | 24,2 |
| 1,65 | 0,01093 | 25,5 | 18,3 | 0,0221 | 21,5 | 0,0331 | 13,4 | 22,0 |
| 1,70 | 0,01261 | 23,6 | 16,6 | 0,0249 | 19,7 | 0,0389 | 11,9 | 20,3 |
| 1,75 | 0,01436 | 22,0 | 15,2 | 0,0277 | 18,2 | 0,0451 | 10,9 | 18,8 |
| 1,80 | 0,01616 | 20,7 | 14,0 | 0,0305 | 17,0 | 0,0517 | 9,76 | 17,6 |
| 1,85 | 0,01800 | 19,6 | 13,0 | 0,0334 | 15,9 | 0,0586 | 8,93 | 16,4 |
| 1,90 | 0,01991 | 18,6 | 12,2 | 0,0362 | 15,0 | 0,0658 | 8,22 | 15,7 |
| 1,95 | 0,02182 | 17,8 | 11,4 | 0,0390 | 14,2 | 0,0732 | 7,61 | 14,8 |
| 2,00 | 0,02377 | 17,0 | 10,8 | 0,0417 | 13,5 | 0,0810 | 7,08 | 14,2 |



unde:

$$R=\frac{R_e+R_i}{2}, \tag{11.11}$$

$R_e$ şi $R_i$ fiind razele exterioară şi interioară ale tubului ondulat, măsurate la suprafaţa mediană.

Pentru un calcul mai exact al săgeţii tuburilor ondulate se utilizează relaţia:

$$f=P\,\frac{1-\mu^2}{h\,E}\,\frac{n}{A_0-\alpha A_1+\alpha^2 A_2+B_0\,\dfrac{h_0^2}{R_i^2}}, \tag{11.12}$$

stabilită prin metoda lui Ritz, bazată pe determinarea condiţiei de minim a energiei potenţiale totale a tubului ondulat, în poziţia de echilibru static,

în care: $E$ este modulul de elasticitate al materialului tubului;
- $\mu$ — coeficientul lui Poisson;
- $\alpha$ — unghiul de înclinare (în rad) al profilului, care la un calcul mai exact se ia în considerare;
- $n$ — numărul de ondulaţii;
- $A_0$, $A_1$, $A_2$, $B_0$ sînt coeficienţi care au valorile date în diagramele din fig. 11.12, în funcţie de parametrii $m$ şi $e$;

unde:

$$m=\frac{r_0}{R_i};\quad e=\frac{R_e}{R_i}, \tag{11.13}$$

$r_0$ fiind raza de rotunjire a profilului.

Unghiul $\alpha$, care este de obicei mic (fig. 11.13), se determină pe baza relaţiei:

$$\operatorname{tg}\alpha\approx\alpha=\frac{\dfrac{2r_0-a}{2}}{R_e-R_i-2r_0}=\frac{2m-\dfrac{a}{R_i}}{2(e-2m-1)}. \tag{11.14}$$

Lungimea tubului:

$$L=2r_0n+(n-1)a. \tag{11.15}$$

Folosind această expresie, relaţia pentru unghiul $\alpha$ este următoarea:

$$\alpha=\frac{2m-\dfrac{L-2nr_0}{(n-1)R_i}}{2(e-2m-1)}. \tag{11.16}$$

Variaţia volumului cavităţii interioare a tubului ondulat se calculează cu ajutorul relaţiei:

$$\Delta V=fA_{ef}. \tag{11.17}$$

Dacă silfonul este solicitat la încovoiere, produsă de un moment încovoietor $M$ sau de o forță transversală, planul plăcii inelare echivalente unei ondulații a tubului se rotește cu un unghi

$$\varphi = 2n\, A_r \frac{M}{Eh^3}, \tag{11.18}$$

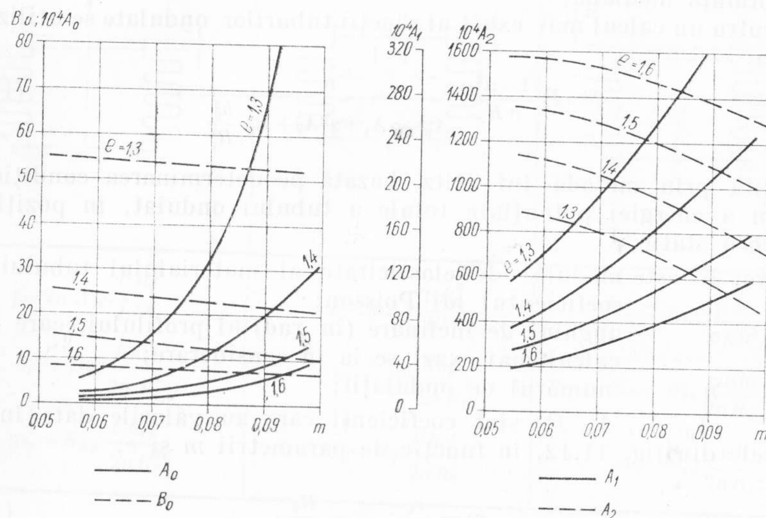



Fig. 11.12

unde: $n$ este numărul de ondulații active;
$h$ — grosimea pereților;
$A_r$ — un coeficient

$$A_r = \frac{3(1-\mu^2)}{\pi}\left(\ln e - \frac{e^2-1}{e^2+1}\right), \text{ unde } e = \frac{Re}{R_i}. \tag{11.19}$$

Valorile coeficientului $A_r$ sînt date în tabela 11.1.

Tubul ondulat poate fi comparat cu o bară echivalentă cu el în ceea ce privește rigiditatea la încovoiere. Unghiul de rotire al barei echivalente sub acțiunea momentului aplicat la capătul ei

$$\varphi = \frac{ML}{B_e}, \tag{11.20}$$

unde: $B_e$ este rigiditatea barei la încovoiere, de aceeași lungime $L$, ca lungimea părții gofrate active a tubului.



Din egalarea celor două unghiuri rezultă rigiditatea barei echivalente

$$B_e = \frac{Eh^3L}{2nA_r}. \tag{11.21}$$

O problemă care se pune curent în multe aplicații practice este stabilitatea tubului ondulat, acționat de o forță axială la compresiune.

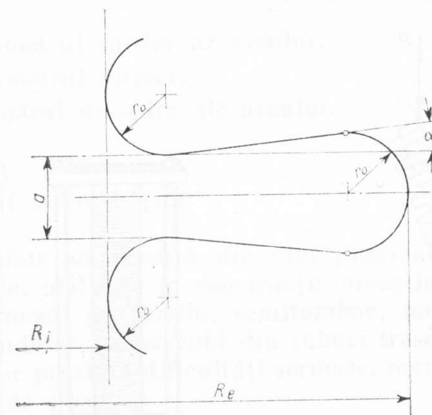



Fig. 11.13

Pentru o anumită sarcină critică, tubul ondulat flambează întocmai ca și o bară comprimată, pierzîndu-și stabilitatea, astfel că în secțiunea transversală a silfonului forța axială creează un moment de încovoiere egal cu $Pv$, unde $v$ este săgeata axei față de poziția rectilinie inițială (fig. 11.14). În cazul unei bare echivalente, forța critică este dată de relația:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 B_e}{(\gamma L)^2}, \tag{11.22}$$

unde: $L$ este lungimea părții gofrate active a tubului ondulat;
$\gamma$ — un coeficient care depinde de modul de fixare a capătului.

Valorile sale sînt identice cu cele folosite la barele drepte (în cazul flambajului), la stabilirea lungimii de calcul pentru flambaj.

În cazul tubului gofrat se obține:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 Eh^3}{\gamma^2 L 2nA_r} \tag{11.23}$$

În caz că deplasarea axială a capătului silfonului este împiedicată de un reazem fix, el își poate pierde stabilitatea sub acțiunea presiunii interioare (fig. 11.15).

Reacțiunea reazemului fix:

$$R = P_{cr} = (p_{cr} - p_0)A_{ef}, \tag{11.24}$$

unde: $p_0$ este presiunea inițială la care se atinge reazemul fix;
$p_{cr}$ — presiunea critică.

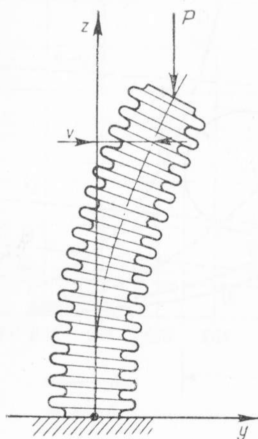



Fig. 11.14

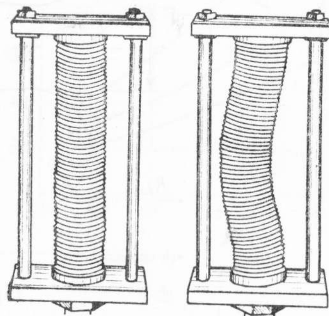


Fig. 11.15

Din relația (11.24) se obține:

$$p_{cr} = \frac{P_{cr}}{A_{ef}} + p_0 = \frac{\pi^2 E h^3}{\gamma^2 A_r 2nLA_{ef}} + p_0 \tag{11.25}$$

sau

$$p_{cr} = \frac{\pi E h^3}{\gamma^2 A_r 2nLR^2} + p_0. \tag{11.26}$$

Calculul de rezistență al tuburilor ondulate este foarte complex; pentru o proiectare satisfăcătoare se pot folosi, însă, la determinarea eforturilor unitare, relațiile din tabela 11.1, din care se pot calcula: săgeata, unghiul de rotire, precum și expresiile eforturilor unitare $\sigma_{ri}$ și $\sigma_{re}$ pentru $r=R_i$ și $r=R_e$.

Pentru micșorarea efectului de histerezis și uneori pentru sarcini mai mari, se utilizează tuburi ondulate combinate cu arc elicoidal.



Pentru determinarea săgeții în acest caz se folosește o relație care ține seamă de influența arcului elicoidal:

$$f = \frac{P}{\dfrac{Eh}{n(1-\mu^2)}\left[A_0 - \alpha A_1 + \alpha^2 A_2 + B_0 \dfrac{h^2}{R_i}\right] + \dfrac{Gd^2}{8D^2 n_1}}, \tag{11.27}$$

în care: $G$ este modulul de elasticitate transversal al materialului arcului;
$D$ — diametrul mediu al arcului;
$d$ — diametrul sîrmei;
$n_1$ — numărul de spire ale arcului.

## 11.3. Indicații tehnologice

Tuburile ondulate se execută din oțel inoxidabil, precum și din materiale neferoase, utilizate în construcția arcurilor ca: alama, bronzul fosforos și bronzul de beriliu, semitombac, metal monel etc. De obicei, tuburile ondulate se execută din tuburi trase avînd pereții subțiri a căror execuție prezintă dificultăți serioase, mai ales dacă se impun toleranțe strînse de grosime.

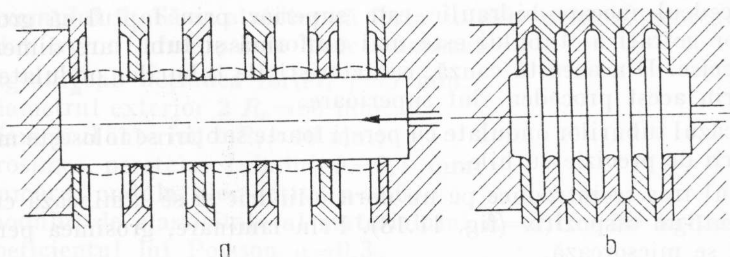



Fig. 11.16

Tuburile ondulate se execută prin procedee hidraulice sau mecano-hidraulice. În cazul procedeului hidraulic, tubul semifabricat se fixează într-un dispozitiv al unei mașini speciale, la care sînt prevăzute — la distanțe corespunzătoare în lungul tubului — niște inele demontabile care string tubul. Prin introducerea de ulei sub presiune în tub, acesta se ondulează corespunzător distanțelor dintre inele (fig. 11.16, *a*). După

această operaţie, tubul este ţinut la presiune interioară constantă şi se presează în sens axial, permiţîndu-se deplasarea inelelor (fig. 11.16, *b*).

La procedeul mecano-hidraulic, tubul semifabricat se roluieşte pe un dorn special, prevăzut cu ondulaţii, ca în fig. 11.17. După această

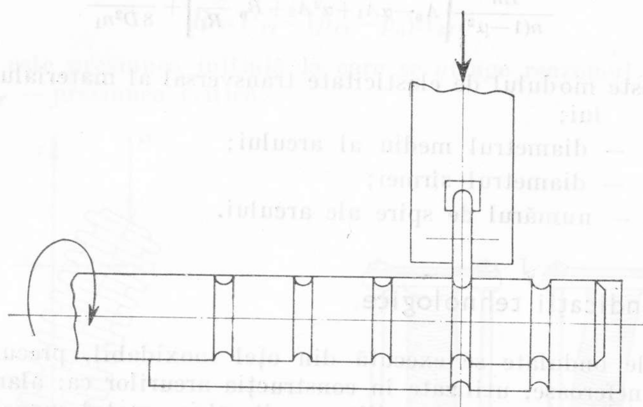


Fig. 11.17

operaţie, tubul se montează la o maşină hidraulică care-l menţine sub presiune constantă şi se presează în sens axial.

Procedeul mecano-hidraulic este superior prin faptul că grosimea pereţilor gofraţi ai tubului este mai uniformă şi tubul are dimensiuni mai precise. Din această cauză, caracteristicile tuburilor ondulate obţinute prin acest procedeu sînt superioare.

În cazul tuburilor ondulate cu pereţi foarte subţiri se foloseşte metoda laminării de precizie cu bile.

Tubul tras se introduce pe un dorn cilindric şi se laminează cu bile aflate într-un dispozitiv (fig. 11.18). Prin laminare, grosimea pereţilor tubului se micşorează.

Un alt procedeu mult utilizat, care dă rezultate foarte bune, constă în executarea tuburilor ondulate din tablă ondulată încheiată prin sudură. Caracteristicile acestor tuburi ondulate obţinute prin sudură sînt de regulă superioare, deoarece în acest caz grosimea tablei este mai uniformă şi prin diferite variante constructive se pot obţine tuburi ondulate de rezistenţă superioară. În fig. 11.19, *a*, *b* şi *c* sînt reprezentate schematic cîteva variante constructive de tuburi ondulate încheiate prin sudură. Se observă că prin sudură se îmbină între ele o serie de discuri.



Înainte de procesul de profilare, tubul trebuie supus în prealabil unui tratament termic de recoacere în cutii etanşe, pentru a fi ferit de oxidare.

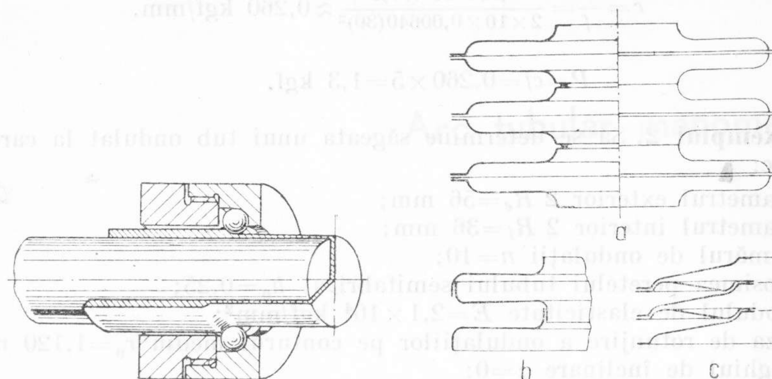



Fig. 11.18 Fig. 11.19

## 11.4 Exemple de calcul

**Exemplul 1.** Să se stabilească forţa cu care trebuie încărcat un tub ondulat avînd următoarele date cunoscute:

săgeata sub acţiunea forţei, $f=5$ mm;
diametrul exterior $2\,R_e=60$ mm;
diametrul interior $2\,R_i=40$ mm;
grosimea peretelui tubului $h=0{,}1$ mm;
numărul ondulaţiilor active $n=10$;
modulul de elasticitate al materialului $E=2{,}15\times10^4$ kgf/cm²;
coeficientul lui Poisson $\mu=0{,}3$.
Tubul ondulat se execută prin sudură.

*Rezolvare.* Rigiditatea:

$$c=\frac{P}{f}=\frac{Eh^3}{2nA_kR_e^2}.$$

Coeficientul $A_k$ se alege din tabela 11.1, în funcţie de raportul

$$e=\frac{R_e}{R_i}=\frac{60}{40}=1{,}50.$$

Rezultă $A_k=0,00640$.

Rigiditatea tubului ondulat:

$$c=\frac{P}{f}=\frac{2,15\times10^4\times0,1^3}{2\times10\times0,00640(30)^2}\approx0,260 \text{ kgf/mm}.$$

$$P=cf=0,260\times5=1,3 \text{ kgf}.$$

**Exemplul 2.** Să se determine săgeata unui tub ondulat la care se cunosc:

diametrul exterior $2\,R_e=56$ mm;
diametrul interior $2\,R_i=36$ mm;
numărul de ondulaţii $n=10$;
grosimea peretelui tubului semifabricat $h_0=0,25$;
modulul de elasticitate $E=2,1\times10^4$ kgf/mm²;
raza de rotunjire a ondulaţiilor pe conturul mediu $r_0=1,120$ mm;
unghiul de înclinare $\alpha=0$;
forţa cu care se încarcă tubul ondulat $P=0,5$ kgf.

*Rezolvare.* Se determină în prealabil rigiditatea tubului:

$$c=\frac{P}{f}\frac{Eh_0}{(1-\mu^2)n}\left(A_0+B_0\frac{h_0^2}{R_i^2}-\alpha A_1+\alpha^2A_2\right).$$

Pentru determinarea coeficienţilor $A_0$, $B_0$, $A_1$, $A_2$ se folosesc diagramele din fig. 11.12.

Mai întîi se determină parametrii $m$ şi $e$:

$$m=\frac{r_0}{R_i}=\frac{1,120}{18}=0,06;\quad e=\frac{R_e}{R_i}=\frac{56}{36}=1,55.$$

Cu ajutorul acestora, din figura amintită se alege

$$A_0\approx0,0002 \text{ şi } B_0\approx8.$$

Deoarece $\alpha=0$,

rezultă $c=\frac{P}{f}=\frac{2,1\times10^4\times0,25}{(1-0,3^2)10}\left(0,0002+8\,\frac{0,25^2}{36^2}\right)\approx1,2$ kgf/mm.

Săgeata tubului

$$f=\frac{P}{c}=\frac{0,5}{1,2}=4,18 \text{ mm}$$

# 12

# Arc tubular manometric

## 12.1. Consideraţii generale

Arcul tubular manometric este larg utilizat în construcţia aparatelor de măsură ca: manometre indicatoare, manometre inregistratoare, manometre de reglare, termometre, vacuummetre, nivelmetre, debitmetre, manometre de adîncime la sondele de petrol etc.

Arcul tubular manometric este de regulă un tub curb, metalic, avînd o secţiune transversală eliptică, ovală sau de profil special. Datorită diferenţei dintre presiunea exterioară şi interioară a tubului, secţiunea îşi schimbă forma provocînd schimbarea curburii tubului, astfel încît capătul lui se deplasează cu o distanţă oarecare corespunzătoare, care se transmite acului aparatului prin intermediul unui mecanism de transmisie montat de obicei compact în partea centrală cuprinsă de arc.

Cel mai răspîndit şi mai cunoscut tip de arc tubular manometric se execută sub forma unui arc de cerc plan cu un unghi la centru de 200–270° (cu o singură spiră), cunoscut în literatura tehnică sub numele de tubul Bourdon.

În fig. 12.1, *a* este reprezentat un arc tubular monometric (tub Bourdon), iar în fig. 12.1, *b* şi *c* este reprezentată schematic variaţia formei tubului în funcţie de modificarea formei secţiunii sale sub acţiunea presiunii.

La un arc tubular manometric, axa tubului este locul geometric al centrelor secțiunilor tubului. Planul care conține această axă se numește plan central.

Arcul tubular manometric este utilizat în construcția de aparate de măsură și control și de elemente de automatizare, pentru că are gabarit mic, sensibilitate deosebită și robustețe mare. Trebuie remarcat însă faptul că aceste arcuri dezvoltă, în schimb, la capătul care acționează asupra mecanismului de transmitere o forță de tracțiune redusă, ceea ce, în unele cazuri, constituie un dezavantaj.

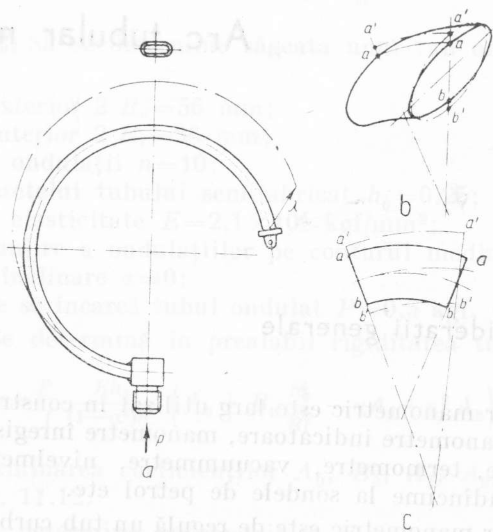


Fig. 12.1

Pentru aparatele la care este necesară o deplasare a capătului arcului mai mare sau o anumită direcție în spațiu se utilizează arcuri tubulare cu mai multe spire, sub formă de spirală plană, de elice cilindrică sau conică, sau în formă de S simplu sau multiplu. Tehnologia construirii acestor arcuri tubulare este mai complicată, în schimb realizarea unor deplasări mai mari ale capătului tubului prezintă avantajul simplificării mecanismului de transmitere la acul indicator al aparatului.

Trebuie remarcat faptul că aceste arcuri tubulare manometrice cu mai multe spire prezintă totuși avantajul unui gabarit foarte mic, deoarece ocupă aproximativ același spațiu pe care-l ocupă și arcul cu o singură spiră.



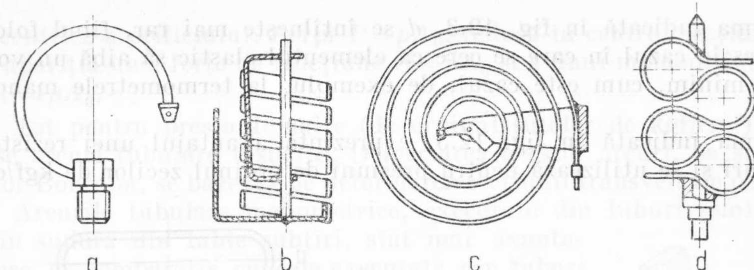


Fig. 12.2

În fig. 12.2, *a—d* sînt reprezentate schemele cîtorva tipuri de arcuri tubulare manometrice cu una și cu mai multe spire.

## 12.2. Forme de secțiuni transversale ale arcurilor tubulare manometrice și importanța lor

Forma secțiunii transversale la arcul tubular manometric influențează caracteristicile mecanice ale arcului, îndeosebi sensibilitatea și rezistența, atît datorită urmărilor pe care le are în comportarea arcului procesul tehnologic folosit la construcția lui, cît și datorită influenței și corelației care există între modul de deformare a secțiunii transversale și deformarea și comportarea arcului tubular manometric.

Formele secțiunii transversale se pot împărți în două categorii, în funcție de procesul tehnologic folosit la construcția tubului:

— secțiuni transversale obținute din tuburi trase fără sudură (fig. 12.3, *a—f*);

— secțiuni transversale obținute prin sudură din table (fig. 12,4, *a—e*).

Primele cinci forme (fig. 12.3, *a—e*) sînt utilizate pentru presiuni mici sau mijlocii. Cele mai uzuale sînt primele trei tipuri: forma ovală (fig. 12.3, *a*), forma eliptică (fig. 12.3, *b*) și forma „D" (fig. 12.3, *c*). Forma ovală este cea mai folosită, deoarece necesită un proces tehnologic mai simplu, în schimb forma eliptică — mai pretențioasă din punct de vedere tehnologic — prezintă avantajul unei sensibilități mai mari a arcului tubular manometric.

Secțiunea transversală „D" prezintă avantajul unei tehnologii simple, în schimb sensibilitatea arcului este mult mai mică.

Forma indicată în fig. 12.3, *d* se întîlnește mai rar, fiind folosită mai ales în cazul în care se cere ca elementul elastic să aibă un volum inițial minim, cum este cazul, de exemplu, la termometrele manometrice.

Forma indicată în fig. 12.3, *e* prezintă avantajul unei rezistențe mai mari și se utilizează pentru presiuni de ordinul zecilor de kgf/cm².

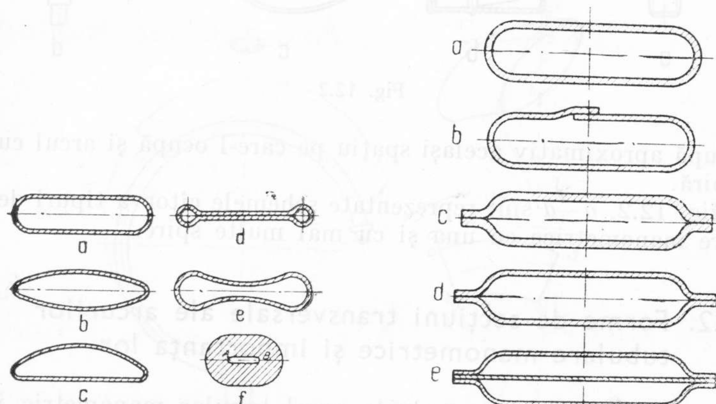


Fig. 12.3

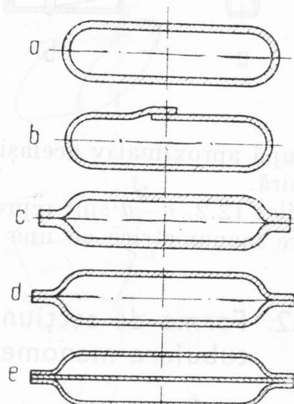


Fig. 12.4

Pentru presiuni înalte (de ordinul sutelor de kgf/cm² sau mai mari) se utilizează tuburi cu pereți groși, avînd secțiunea plan-ovală (fig. 12.3, *f*). Utilizarea acestei forme este însă limitată, deoarece în punctele *A* și *B* ale secțiunii apar eforturi unitare foarte mari care provoacă ruperea ei în aceste puncte.

Pentru presiuni mari (de ordinul miilor de kgf/cm²) se utilizează tuburi cu pereți groși, cu orificiul interior excentric în raport cu conturul exterior al secțiunii (fig. 12.5). Aceste secțiuni se utilizează la arcurile tubulare manometrice cunoscute sub numele de arcuri Negatkin. Solicitarea și funcționarea arcului Negatkin diferă complet de cele ale arcului Bourdon. Dacă la arcul Bourdon, modificarea curburii tubului arcului manometric și deplasarea capătului tubului sînt produse de deformarea secțiunii transversale, în cazul arcului tip Negatkin, curbura se modifică datorită faptului că tubul este solicitat de un moment încovoietor, dat de forțele de presiune care sînt aplicate excentric față de centrul de greutate al secțiunii. În fig. 12.5 este arătat modul cum apare momentul încovoietor în secțiune datorită plasării



excentrice a orificiului. Forța $P=pA_0$, redusă în centrul secțiunii, duce la apariția unei forțe de tracțiune $N=pA_0$ și a unui moment încovoietor $M_i=epA_0$.

Tot pentru presiuni înalte (de ordinul sutelor de kgf/cm²) se folosesc arcuri tubulare răsucite. Deformarea acestor arcuri, ca și a tuburilor Bourdon, se bazează pe deformarea secțiunii transversale (fig. 12.6).

Arcurile tubulare manometrice, executate din tuburi semifabricate prin sudură din table subțiri, sînt mai avantajoase în comparație cu cele executate din tuburi trase fără sudură, în primul rînd datorită simplificării tehnologiei. Deoarece toleranțele care se

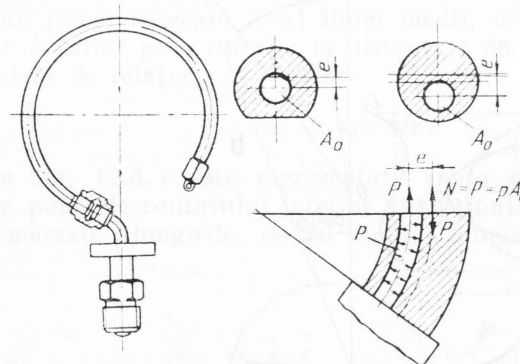
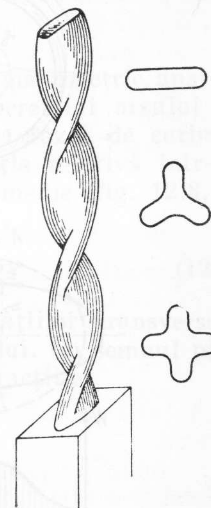


Fig. 12.5


Fig. 12.6

pot impune la grosimea tablei sînt mult mai strînse decît la tuburile trase fără sudură, cîmpul de împrăștiere a caracteristicilor arcurilor dintr-un lot este mult mai redus. Prin folosirea tuburilor sudate s-au obținut tipuri noi de arcuri tubulare, și anume arcuri cu mai multe cavități, la care deplasarea capătului unui astfel de arc depinde de presiunea care acționează în diferitele cavități.

## 12.3. Considerații teoretice și de calcul

Se consideră tubul din fig. 12.7 care are un capăt fixat într-un ștuț, iar la celălalt capăt este montat mecanismul indicator al aparatului. Sub acțiunea presiunii interioare exercitate de fluid, arcul se desface

primind o deformaţie unghiulară $\Delta\gamma$, iar capătul său execută o cursă (fig. 12.7, *a*). În acelaşi timp, secţiunea transversală a tubului se deformează, tinzînd să devină circulară şi se roteşte în jurul axei mari. Astfel, o fibră oarecare $AB$ a unui element de arc limitat de două secţiuni

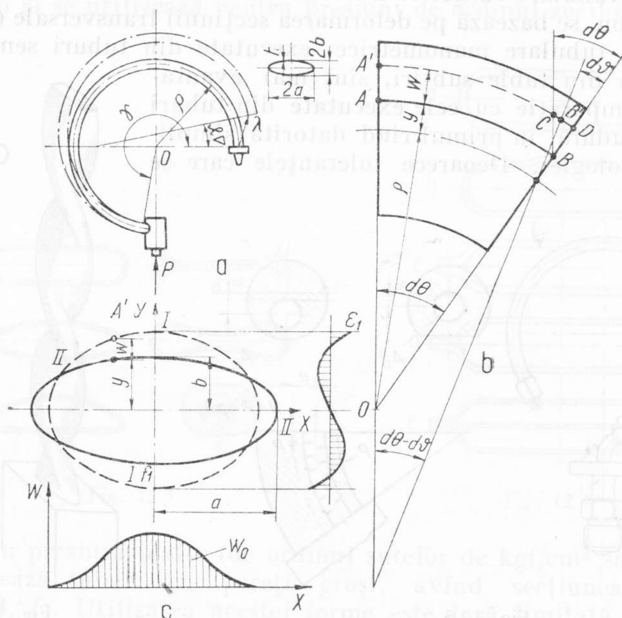


Fig. 12.7

transversale, care fac între ele unghiul iniţial $d\theta$ (fig. 12.7, *b*) şi după deformare unghiul $d\theta - d\vartheta$ ar lua poziţia $A'B'$.

Dacă se notează cu $y$ distanţa fibrei $AB$ pînă la fibra neutră a peretelui şi cu $w$, deplasarea punctului $A$ din secţiunea transversală pe direcţia axei $y$, (fig. 12.7, *c*), alungirea fibrei $AB$ este dată de relaţia:

$$\varepsilon_1 = \frac{Cd'}{AB} = \frac{w\Delta\theta - (y+w)\,d\vartheta}{(\rho+y)d\theta}, \qquad (12.1)$$

în care: $\rho$ este raza de curbură a axei înainte de deformare, în mm.

Deoarece $y \ll \rho$, $w \ll y$ şi unghiul de rotire relativă al elementului



$\frac{d\vartheta}{d\theta}$ este egal cu unghiul de rotire relativ $\frac{\Delta\gamma}{\gamma}$, $\frac{d\vartheta}{d\theta} = \frac{\Delta\gamma}{\gamma}$, se poate scrie:

$$\varepsilon_1 = \frac{w - y\,\frac{d\vartheta}{d\theta}}{\rho} \approx \frac{w - y\,\frac{\Delta\gamma}{\gamma}}{\rho}, \qquad (12.2)$$

unde: $\gamma$ este unghiul la centru al părţii active a arcului, măsurat pe axa centrală a tubului

$\Delta\gamma$ – deformaţia unghiulară.

Afară de deformaţiile longitudinale $\varepsilon_1$, la arcul manometric apar şi deformaţiile transversale $\varepsilon_2$, datorite încovoierii peretelui arcului în sens transversal. Dacă se notează cu $d\varkappa$ — variaţia razei de curbură într-un punct oarecare $A$ al liniei medii, deformaţia relativă într-un punct $B$, aflat pe o fibră $cc$ la distanţa $z$ de linia medie (fig. 12.8, *a*) este dată de relaţia:

$$\varepsilon_2 = z d\varkappa. \qquad (12.3)$$

În fig. 12.8, *c* este reprezentată epura deformaţiilor transversale $\varepsilon_2$, în punctele conturului interior al secţiunii arcului. Cu semnul plus sînt marcate alungirile, iar cu semnul minus contracţiile.

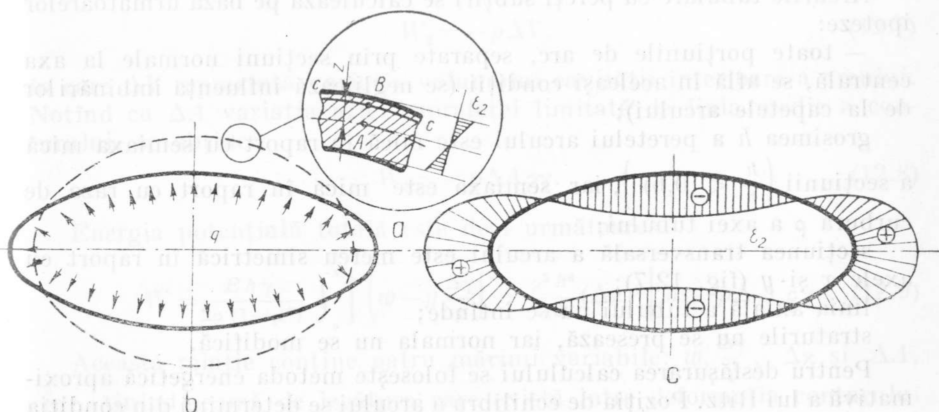


Fig. 12.8

Din analiza relaţiilor precedente pentru deformaţii se poate vedea că funcţionarea arcului Bourdon este influenţată de modul în care se

deformează conturul secţiunii transversale. Deformarea unghiulară $\Delta\gamma$ şi deplasarea liniară $\lambda$ a capătului arcului depind de modul de deformare a conturului secţiunii transversale.

Sensibilitatea arcului manometric creşte o dată cu micşorarea grosimii $h$ şi cu creşterea razei de curbură $\rho$ a arcului. Sensibilitatea arcului depinde şi de raportul $\frac{a}{b}$ al axelor secţiunii transversale, astfel că cu cît secţiunea este mai aplatisată, cu atît ea se deformează mai mult sub acţiunea presiunii. În cazul secţiunii circulare, sensibilitatea arcului este aproape nulă.

Calculul arcurilor tubulare de tip Bourdon se face în două ipoteze şi anume:

a) cazul arcurilor cu pereţi subţiri, caracterizate prin raportul:

$$\frac{h}{b} < 0,6;$$

b) cazul arcurilor cu pereţi groşi, caracterizate prin raportul:

$$\frac{h}{b} > 0,6 \ldots 0,7.$$

Arcurile tubulare cu pereţi subţiri se calculează pe baza următoarelor ipoteze:

— toate porţiunile de arc, separate prin secţiuni normale la axa centrală, se află în aceleaşi condiţii (se neglijează influenţa îmbinărilor de la capetele arcului);

grosimea $h$ a peretelui arcului este mică în raport cu semiaxa mică a secţiunii $\left(\frac{h}{b} < 0,6\right)$ iar semiaxa este mică în raport cu raza de curbură $\rho$ a axei tubului;

secţiunea transversală a arcului este mereu simetrică în raport cu axele $x$ şi $y$ (fig. 12.7);

linia axială a tubului nu se întinde;

straturile nu se presează, iar normala nu se modifică.

Pentru desfăşurarea calculului se foloseşte metoda energetică aproximativă a lui Ritz. Poziţia de echilibru a arcului se determină din condiţia minimului de energie potenţială totală, condiţie care va da relaţia dintre sarcină şi deplasarea capătului arcului.

Energia potenţială totală se obţine însumînd energia potenţială a deformaţiilor cu energia forţelor exterioare. Energia potenţială a deformaţiei se obţine pornind de la expresia energiei potenţiale specifice, care, în cazul unei stări tensionale cu două axe, este dată de relaţia:



$$W_0 = \frac{E}{2(1-\mu^2)}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\mu\varepsilon_1\varepsilon_2). \quad (12.4)$$

Pentru a exprima energia potenţială de deformaţie a întregului arc se porneşte de la energia potenţială de deformaţie a unui element de volum $dV$, care se obţine prin separarea unei porţiuni din arc, cu unghiul la centru $\Delta\theta$. Dacă elementul de volum are grosimea $dz$ şi lăţimea $ds$ elementul de volum $dV = \rho d\theta ds\, dz$.

Energia potenţială de deformaţie a întregului arc:

$$W_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \int_0^s W_0\, dV = \frac{E\rho\gamma}{2(1-\mu^2)} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \int_0^s (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\mu_1\varepsilon_1\varepsilon_2)\, ds\, dz \quad (12.5)$$

care ţinînd seamă de relaţiile date anterior pentru $\varepsilon_1$ şi $\varepsilon_2$ devine:

$$W_1 = \frac{E h\gamma}{2\rho(1-\mu^2)} \int_0^s \left[\left(w - y\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\right)^2 + \frac{\rho^2 h^2}{12}(\Delta\varkappa)^2\right] ds. \quad (12.6)$$

Energia de poziţie a forţelor exterioare, ţinînd seamă că asupra arcului acţionează numai presiunea fluidului, este dată de relaţia:

$$W_2 = -p\Delta V, \quad (12.7)$$

în care $\Delta V$ reprezintă variaţia volumului cavităţii interioare a arcului. Notînd cu $\Delta A$ variaţia ariei suprafeţei limitată de linia medie a conturului, se obţine:

$$W_2 = -p\Delta A\rho\gamma. \quad (12.8)$$

Energia potenţială totală este deci următoarea:

$$W = \frac{E h\gamma}{2\rho(1-\mu^2)} \int_0^s \left[\left(w - y\frac{\Delta\gamma}{\rho}\right)^2 + \frac{\rho^2 h^2}{12}(\Delta\varkappa)^2\right] ds - p\Delta A\rho\gamma. \quad (12.9)$$

Această relaţie conţine patru mărimi variabile: $w$, $\frac{\Delta\gamma}{\gamma}$, $\Delta\varkappa$ şi $\Delta A$, care, ţinînd seamă de legătura care există între deformaţia conturului transversal şi valorile acestor patru mărimi, se poate transforma astfel ca să depindă numai de două variabile.

Pentru a realiza transformarea dorită, se consideră un cadru (un inel) închis, obţinut prin două secţiuni apropiate dintr-un tub drept,

care are forma tubului manometric studiat, solicitat de o sarcină uniform repartizată $q$ (fig. 12.9, $a$).

Din studiul acestui inel, considerat ca un cadru static nedeterminat, se pot exprima relațiile de legătură între mărimile $q$, $w$, $\Delta\varkappa$ și $\Delta A$, în funcție de deformarea conturului.

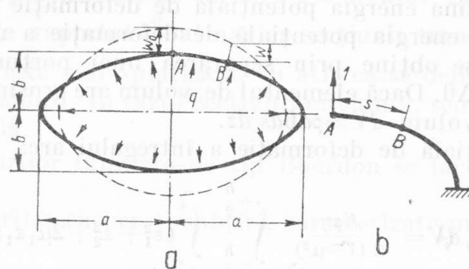



Fig. 12.9

Pentru determinarea celor patru mărimi, care depind de variația conturului secțiunii, este necesar să se afle momentul încovoietor într-un punct $B$ oarecare al cadrului, cu următoarea relație:

$$M=\frac{q\,b^2}{2}\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)\Omega, \tag{12.10}$$

în care $\Omega$ este funcția arcului $s$ al conturului, care depinde de secțiunea transversală a tubului și de forma tubului Bourdon.

Deplasarea punctului $A$ al cadrului este dată de relația:

$$w_0=\int_0^{s/4}\frac{MM_1}{B}\,ds=\frac{qa^2}{2B}(a^2-b^2)\,m, \tag{12.11}$$

în care: $B$ este rigiditatea la încovoiere a cadrului;

$m$ — un coeficient care depinde de forma cadrului.

Deplasarea unui punct oarecare $B$ în sens vertical

$$w=\int_0^{s/4}\frac{MM_1\,ds}{B}=\frac{w_0}{m}\,\omega, \tag{12.12}$$

unde $\omega$ este funcția arcului $s$ al conturului, iar $M_1$, valoarea momentului încovoietor în punctul $B$, produs de o forță unitară aplicată în $A$ (fig. 12.9, $b$).



În mod asemănător se obțin relațiile:

$$\Delta\varkappa=\frac{M}{B}=\frac{w_0}{ma^2}\,\omega, \tag{12.13}$$

$$\Delta A=4\int_0^{s/4}\frac{MM_{1r}\,ds}{B}=\frac{2\,w_0}{m}\,a\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)n, \tag{12.14}$$

unde $M_{1r}=\frac{b^2}{2}\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)\Omega$, este momentul produs de sarcina uniform repartizată, egală cu unitatea $q=1$, iar

$n$ — un coeficient care depinde de conturul cadrului.

Relațiile pentru determinarea coeficienților $\Omega$, $\omega$, $m$ și $n$ se dau, în funcție de conturul secțiunii transversale, în tabela 12.1.

Folosind relațiile precedente, energia potențială totală, în funcție de numai două mărimi variabile $w_0$ și $\frac{\Delta\gamma}{\gamma}$, se poate determina cu relația:

$$W=\frac{Eh\gamma}{2\,\rho(1-\mu^2)}\int_0^{s}\left[\left(\frac{w_0}{m}\,\omega-y\,\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\right)^2+\frac{\rho^2h^2}{12a^4}\,\frac{w_0^2}{m^2}\,\Omega^2\right]ds-2p\frac{w_0}{m}\,a\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)n\,\rho\gamma. \tag{12.15}$$

Această expresie poate fi adusă sub forma:

$$W=\frac{2\,Eha\,\gamma}{\rho\,(1-\mu^2)}\left[\frac{w_0^2}{m^2}A_1-2b\frac{w_0}{m}\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\right)A_2+b^2\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\right)^2A_3+\right.$$
$$\left.+\frac{\varkappa^2}{12}\,\frac{w_0^2}{m^2}\,n\right]-2p\,\frac{w_0}{m}\,a\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)n\rho\gamma, \tag{12.16}$$

unde:

$$\left.\begin{aligned}
A_1&=\frac{1}{a}\int_0^{s/4}\omega^2\,ds;\\
A_2&=\frac{1}{ab}\int_0^{s/4}y\omega\,ds;\\
A_3&=\frac{1}{a\,b^2}\int_0^{s/4}y^2\,ds;\\
n&=\frac{1}{a}\int_0^{s/4}\Omega^2\,ds \quad\text{și}\quad \varkappa=\frac{\rho h}{a^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{12.17}$$

Condiţiile de minim ale energiei potenţiale totale se pot scrie sub forma:

$$\frac{\partial W}{\partial w_0}=0 \quad \text{şi} \quad \frac{\partial W}{\partial\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\right)}=0. \tag{12.18}$$

Făcînd calculele, se obţine:

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma}=p\,\frac{1-\mu^2}{E}\,\frac{\rho^2}{bh}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{6\,\frac{A_2}{A_3}}{\frac{12}{n}\left(A_1-\frac{A_2^2}{A_3}\right)+\varkappa^2} \tag{12.19}$$

sau

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma}=p\,\frac{1-\mu^2}{E}\,\frac{\rho^3}{bh}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{\alpha}{\beta+\varkappa^2}, \tag{12.20}$$

unde:

$$\alpha=6\frac{A_2}{A_3} \quad \text{şi} \quad \beta=\frac{12}{n}\left(A_1-\frac{A_2^2}{A_3}\right). \tag{12.21}$$

Valorile coeficienţilor $\alpha$ şi $\beta$ sînt date, pentru secţiunile eliptice şi plan-ovale, în diagramele din fig. 12.10 sau în tabela 12.2, în funcţie de raportul semiaxelor $\frac{a}{b}$.

Deplasarea capătului tubului Bourdon se poate determina uşor cu ajutorul integralei lui Mohr:

$$\lambda=\int_s \frac{MM_1}{B}\,ds=\int_\Theta\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho}\right)M_1\;\rho d\theta, \tag{12.22}$$

unde $M_1$ este momentul încovoietor dat de forţa unitară, iar $B$, rigiditatea la încovoiere a tubului.

S-a ţinut seamă că

$$\frac{M}{B}=\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho} \quad \text{şi} \quad ds=\rho d\theta, \tag{12.23}$$

unde $d\theta$ este unghiul la centru al elementului de arc.

Ţinînd seamă de notaţiile din fig. 12.7, se poate scrie:

$$\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho}=\frac{d\vartheta}{\rho d\theta}=\frac{\Delta\gamma}{\rho\gamma} \quad \text{şi deci:} \tag{12.24}$$

$$\lambda=\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\int_0^\gamma M_1\;d\theta. \tag{12,25}$$



Tabela 12.2

**Valorile coeficienţilor $\alpha$, $\beta$, $n$, $\xi$, $\zeta$**

| $\frac{a}{b}$ | 1 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pentru secţiune eliptică | | | | | | | | | | | | |
| $\alpha$ | 0,750 | 0,636 | 0,566 | 0,493 | 0,452 | 0,430 | 0,416 | 0,406 | 0,400 | 0,395 | 0,390 | 0,360 |
| $\beta$ | 0,083 | 0,062 | 0,053 | 0,045 | 0,044 | 0,043 | 0,042 | 0,042 | 0,042 | 0,042 | 0,042 | 0,042 |
| $n$ | 0,197 | 0,149 | 0,142 | 0,121 | 0,111 | 0,106 | 0,102 | 0,100 | 0,098 | 0,097 | 0,095 | 0,089 |
| $\zeta$ | 0,833 | 0,662 | 0,584 | 0,499 | 0,459 | 0,439 | 0,429 | 0,423 | 0,416 | 0,410 | 0,401 | 0,381 |
| $\xi$ | 0,0982 | 0,0775 | 0,0620 | 0,0565 | 0,0515 | 0,0480 | 0,0465 | 0,0460 | 0,0455 | 0,0450 | 0,0445 | 0,409 |
| Pentru secţiune ovală | | | | | | | | | | | | |
| $\alpha$ | 0,637 | 0,594 | 0,548 | 0,480 | 0,437 | 0,408 | 0,388 | 0,372 | 0,360 | 0,350 | 0,343 | 0,267 |
| $\beta$ | 0,096 | 0,110 | 0,115 | 0,121 | 0,121 | 0,121 | 0,121 | 0,120 | 0,119 | 0,119 | 0,118 | 0,114 |
| $n$ | 0,149 | 0,151 | 0,144 | 0,131 | 0,122 | 0,155 | 0,110 | 0,107 | 0,105 | 0,103 | 0,101 | 0,083 |
| $\zeta$ | 0,811 | 0,713 | 0,652 | 0,591 | 0,552 | 0,524 | 0,504 | 0,488 | 0,476 | 0,467 | 0,459 | 0,296 |
| $\xi$ | 0,0833 | 0,0818 | 0,0815 | 0,0743 | 0,0690 | 0,0652 | 0,0624 | 0,0602 | 0,0585 | 0,0571 | 0,0560 | 0,0444 |

*Tabela 12.1*

**Relații pentru determinarea coeficienților $m$, $n$, $\Omega$, $\omega$ și $\Phi$, utilizați la calculul arcului tubular manometric**

| Coeficientul | Secțiunea eliptică (fig. 12.15, *c*) | Secțiune ovală: Porțiunea dreaptă $[0<x<a-bl$ (fig. 12.15, *b*) | Secțiune ovală: Porțiunea curbă $[0<\varphi\leqslant 90°]$ (fig. 12.15, *b*) |
|---|---|---|---|
| $\Omega$ | $\frac{J_2}{J_0}-\sin^2\varphi$ | $A-\frac{x^2}{b^2}$ | $A-\frac{a}{b}-1^2+2\frac{a}{b}-1\sin\varphi$ |
| $m$ | $J_2-\frac{J_1J_2}{J_0}$ | $\frac{1}{\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{a}{b}+1\right)}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}-1\right)\left[\left(\frac{a}{b}-1\right)^2+12\right]+\frac{\pi}{2}\left[\left(\frac{a}{b}-1\right)^2+1\right]-A\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-1\right)+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\frac{a}{b}-1}\right]\right\}$ | |
| $n$ | $J_4-\frac{J_2^2}{J_0}$ | $\frac{1}{\frac{a}{b}\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)^2}\left\{\left(\frac{a}{b}-1\right)^3\left[\frac{1}{5}\left(\frac{a}{b}-1\right)^2+4\right]+\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{b}-1\right)^2\times\left[\left(\frac{a}{b}-1\right)^2+2\right]+A^2\left[\frac{a}{b}-1+\frac{\pi}{2}\right]-A\left(\frac{a}{b}-1\right)\left[\frac{2}{3}\left(\frac{a}{b}-1\right)^2+\pi\left(\frac{a}{b}-1\right)+4\right]\right\}$ | |



*Tabela 12.1* (continuare)

| coeficientul | Secțiunea eliptică (fig. 12.15, *c*) | Secțiune ovală: Porțiunea dreaptă $[0<x<a-bl$ (fig. 12.15, *b*) | Secțiune ovală: Porțiunea curbă $[0<\varphi<90°]$ (fig. 12.15, *b*) |
|---|---|---|---|
| $\omega$ | $\frac{J_2}{J_0}J_0'\sin\varphi-\frac{J_2}{J_0}J_1'-J_2'\sin\varphi+J_3'$ | $\frac{1}{\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)}\left\{\frac{x^4}{12b^4}\frac{A}{2}\frac{x^2}{b^2}+\left(\frac{a}{b}-1\right)^2\left[\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}-1\right)^2+3\right]+\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{b}-1\right)\left[\left(\frac{a}{b}-1\right)^2+1\right]-A\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-1\right)^2+\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{b}-1\right)+1\right]\right\}$ | $\frac{1}{\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)}\left\{\left[\left(\frac{a}{b}-1\right)^2-A\right]\times\cos\varphi-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\sin\varphi\right]+\left(\frac{a}{b}-1\right)\left[\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]\right\}$ |
| $\Phi$ | $\omega-\frac{a}{6}\cos\varphi$ | $\omega-\frac{a}{6}$ | $\omega-\frac{a}{6}\cos\varphi$ |
| | unde: $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$; $J_n'=\int_\varphi^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$; $k^2=1-\frac{b^2}{a^2}$ | unde: $A=\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}-1+\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}-1\right)^2+\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{b}-1\right)+2\right]$ | |

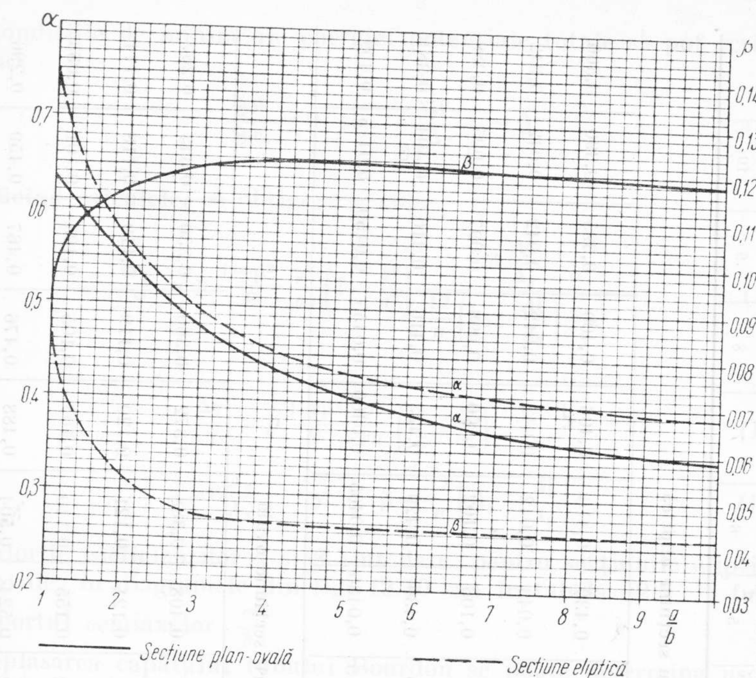


Fig. 12.10

Deplasarea $\lambda$ se descompune de regulă în două componente, ca în fig. 12.11, *c*, și anume: o componentă radială $\lambda_r$ și o componentă tangențială $\lambda_t$.

Pentru determinarea acestor componente se aplică în capătul arcului forța unitară în sens radial (fig. 12.11, *a*) sau în sens tangențial (fig. 12.11, *b*) și se obține:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_r&=\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\,\rho\,(1-\cos\gamma);\\ \lambda_t&=\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\,\rho\,(\gamma-\sin\gamma).\end{aligned}\right\} \quad (12.26)$$

Mărimea deplasării totale este dată de relația

$$\lambda=\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_t^2}=\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\,\rho\sqrt{(1-\cos\gamma)^2+(\gamma-\sin\gamma)^2} \quad (12.27)$$

sau notînd $\Gamma=\sqrt{(1-\cos\gamma)^2+(\gamma-\sin\gamma)^2}$,



$$\lambda=\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\,\rho\,\Gamma. \quad (12.28)$$

Valorile lui $\Gamma$ se pot lua din diagrama din fig. 12.12.

Deplasarea totală:

$$\lambda=p\,\frac{1-\mu^2}{E}\,\frac{\rho^3}{bh}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{\Gamma\alpha}{\beta+\varkappa^2}. \quad (12.29)$$

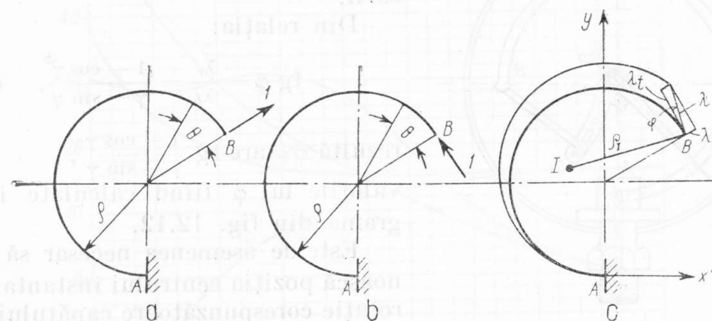


Fig. 12.11

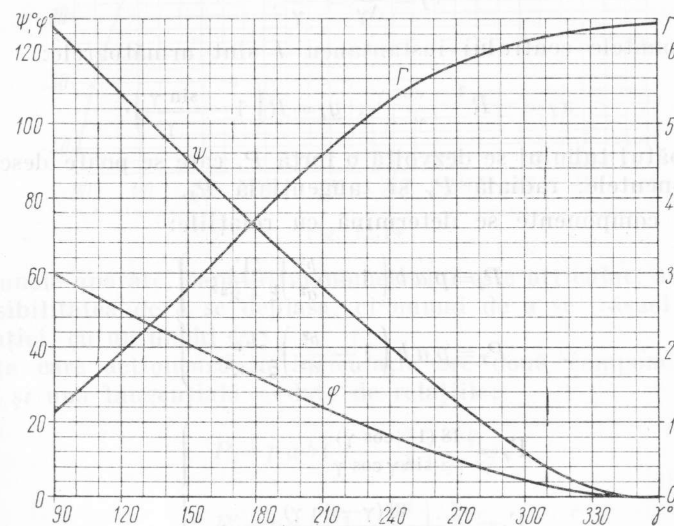


Fig. 12.12

Deplasarea capătului $B$ al tubului Bourdon, în cazul deformaţiilor mici, se poate considera liniară. Capătul $B$ antrenează mecanismul de înregistrare al aparatului (fig. 12.13), astfel că articulaţia din $B$ se deplasează cu mărimea $\lambda$. Rezultă că viteza punctului $B$ al tijei $BC$ are direcţia determinată de deplasarea $\lambda$, adică de unghiul $\varphi$ dintre tangenta la arcul format de tub şi direcţia deplasării.

Fig. 12.13

Din relaţia:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\lambda_r}{\lambda_t} = \frac{1-\cos\gamma}{\gamma-\sin\gamma}, \qquad (12.30)$$

rezultă $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{1-\cos\gamma}{\gamma-\sin\gamma}$, valorile lui $\varphi$ fiind calculate în diagrama din fig. 12.12.

Este de asemenea necesar să se cunoască poziţia centrului instantaneu de rotaţie corespunzătoare capătului $B$ al arcului. Raza $BI=\rho_I$ este dată de relaţia:

$$\rho_I = \frac{\lambda}{\Delta\gamma} = \frac{\rho\Gamma}{\gamma}, \qquad (12\ 32)$$

iar coordonatele centrului instantaneu $I$ sînt următoarele:

$$x_I = -R\frac{1-\cos\gamma}{\gamma};\quad y_I = R\left(1-\frac{\sin\gamma}{\gamma}\right). \qquad (12.33)$$

La capătul tubului se dezvoltă o forţă $P$, care se poate descompune în componentele: radială $P_r$ şi tangenţială $P_t$.

Aceste componente se determină cu relaţiile:

$$\left.\begin{aligned} P_t &= p\,a\,b\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{\zeta\Gamma_t}{\xi+\varkappa^2};\\ P_r &= p\,a\,b\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{\zeta\Gamma_r}{\xi+\varkappa^2} \end{aligned}\right\} \qquad (12.34)$$

unde

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_r &= \frac{48\,(1-\cos\gamma)}{\gamma-\sin\gamma\cos\gamma};\\ \Gamma_t &= \frac{48\,(\gamma-\sin\gamma)}{3\gamma-4\sin\gamma+\sin\gamma\cos\gamma}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.35)$$



Valorile expresiilor $\Gamma_r$ şi $\Gamma_t$ sînt calculate în diagrama din fig. 12.14, iar mărimile $\zeta$ şi $\xi$ sînt date în tabela 12.2.

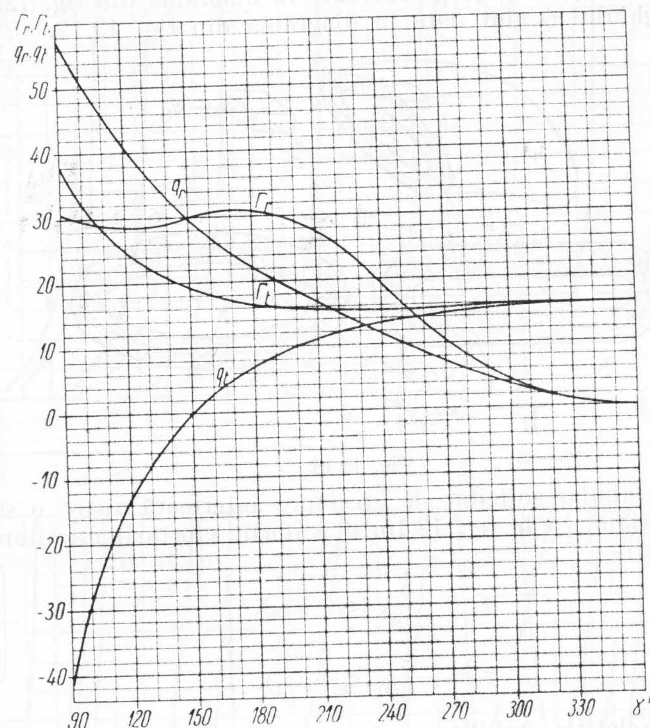



Fig. 12.14

La unele aparate, capătul manometrului este articulat, astfel că nu are posibilitatea de a se deplasa, ci numai de a se răsuci în jurul articulaţiei, cu un unghi $\psi$.

Forţa care acţionează în articulaţie are două componente — una radială şi una tangenţială — date de relaţiile:

$$\begin{aligned} P_t &= p\,a\,b\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{\zeta q_t}{\xi+\varkappa^2},\\ P'_r &= p\,a\,b\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{\zeta q_r}{\xi+\varkappa^2}. \end{aligned} \qquad (12.36)$$

Direcţia de acţiune a acestei forţe este $\operatorname{tg} \psi = \frac{q_r}{q_t}$, $\psi$ fiind unghiul cu care se răsuceşte capătul tubului manometric în jurul articulaţiei. Valorile coeficienţilor $q_r$ şi $q_t$ sînt date în diagrama din fig. 12.14, iar valorile unghiului $\psi$ sînt date în diagrama din fig. 12.12.

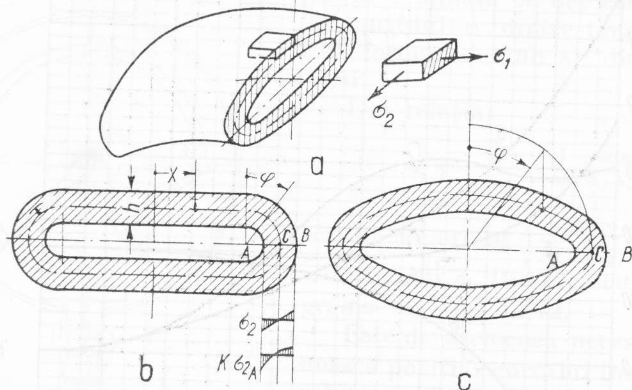



Fig. 12.15

În arcul tubular solicitat de presiunea interioară apare o stare de tensiune biaxială, ca în fig. 12.15, *a*, valorile eforturilor unitare fiind date de relaţiile:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1). \end{aligned}\right\} \qquad (12.37)$$

Folosind relaţiile stabilite pentru $\varepsilon_1$ şi $\varepsilon_2$, relaţiile (12.37) devin:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= p\,\frac{\rho^2}{a^2}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{3}{\beta+\varkappa^2}\left(\frac{2}{\varkappa}\Phi \pm \mu\Omega\right), \\ \sigma_2 &= p\,\frac{\rho^2}{a^2}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{3}{\beta+\varkappa^2}\left(\pm\Omega + \mu\frac{2}{\varkappa}\Phi\right), \end{aligned}\right\} \qquad (12.38)$$

unde: $\Omega$ şi $\Phi$ sînt funcţii dependente de poziţia punctului pe contur determinat prin coordonatele $x$ şi $\varphi$ (fig. 12.15, *b* şi *c*). Semnul plus corespunde conturului exterior al secţiunii transversale, iar minus — conturului interior.

În diagramele din fig. 12.16, *a*, *b* şi *c* se dau valorile funcţiilor $\Omega$, $\Phi$ şi $\omega$ pentru secţiunile eliptică şi plan-ovală.

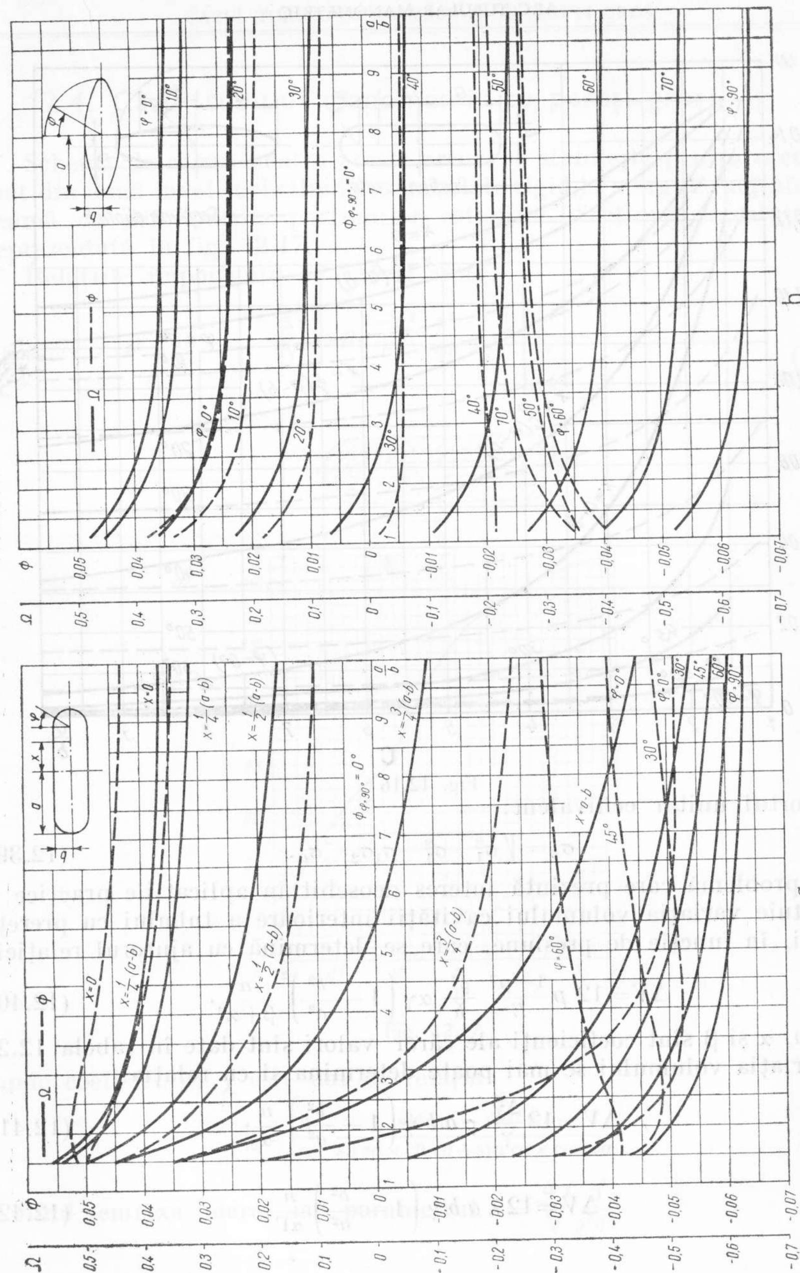


Fig. 12.16 *a*, *b*

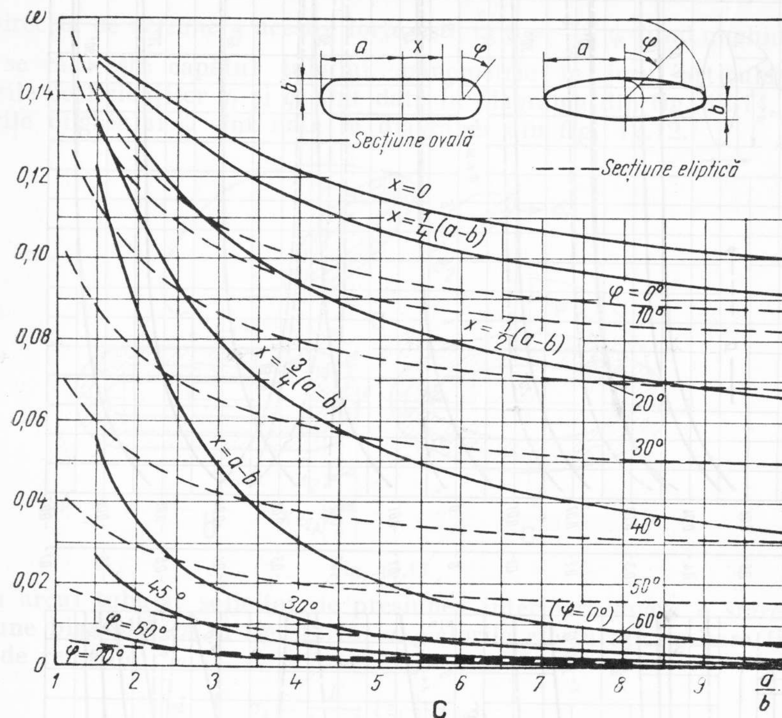



Fig. 12.16

Efortul unitar echivalent:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2} \leq \sigma_a. \tag{12.39}$$

O problemă care prezintă interes deosebit în aplicațiile practice o constituie variația volumului cavității interioare a tubului cu pereți subțiri, în funcție de presiune, care se determină cu ajutorul relației:

$$\Delta V = 12\, p \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\rho^3}{h} \alpha \gamma \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)^2 \frac{n}{\beta + \varkappa^2}, \tag{12.40}$$

unde $n$, $\alpha$ și $\beta$ sînt coeficienți ale căror valori sînt date în tabela 12.2.

Variația volumului se mai poate determina și cu relația:

$$\Delta V = 12 \frac{\Delta\gamma}{\gamma} \rho\, a\, b\, \gamma \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \frac{n}{\alpha}, \tag{12.41}$$

sau

$$\Delta V = 12 \lambda\, a\, b\, \gamma \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \frac{n}{\alpha \Gamma}. \tag{12.42}$$

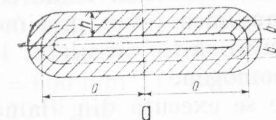


## 12.4. Cazul tubului manometric cu pereți groși

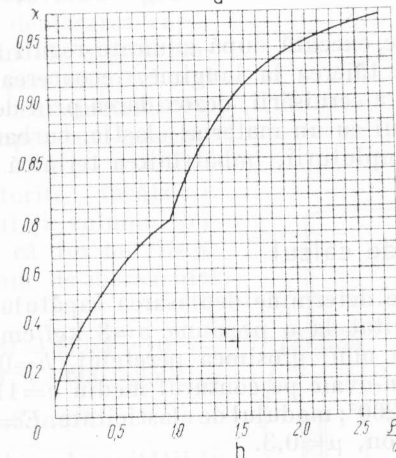
Schema de calcul pentru aceste arcuri se stabilește pentru arcul format din două învelișuri cilindrice îmbinate rigid la margini, neținîndu-se seamă de deformațiile porțiunilor rotunjite. Secțiunea acestuia este reprezentată în fig. 12.17, *a*.

Relațiile importante de calcul sînt:

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = p \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\rho^2}{bh} \frac{1-\chi}{\chi + \frac{h^2}{12\, b^2}}, \tag{12.43}$$




a




b

Fig. 12.17

unde coeficientul $\chi$ este dat de relația:

$$\chi = \frac{1}{ca} \frac{sh^2\, ca - \sin^2 ca}{sh\, ca \times ch\, ca + \sin ca \times \cos ca}, \tag{12.44}$$

$a$ fiind semiaxa mare, iar parametrul $c = \sqrt[4]{\frac{3}{\rho^2 h^2}}$.

Valorile lui $\chi$ sînt date în diagrama din fig. 12.17, *b*.

Pentru deplasarea capătului arcului se pot folosi aceleași relații ca la tuburile cu pereți subțiri, rezultatele fiind destul de exacte.

Forțele din capătul arcului se calculează pe baza relațiilor:

$$\left.\begin{aligned} P_t &= 8\,p\,a\,b\,(1-\chi)\,\frac{\gamma-\sin\gamma}{3\gamma-4\sin\gamma+\sin\gamma\cos\gamma} \\ P_r &= 8\,p\,ab\,(1-\chi)\,\frac{1-\cos\gamma}{\gamma-\sin\gamma\cos\gamma}. \end{aligned}\right\} \quad (12.45)$$

## 12.5. Indicații tehnologice

Pentru a realiza un arc manometric de calitate superioară trebuie ca secțiunea pe toată lungimea țevii, grosimea pereților și ecruisarea să fie uniforme, axa arcului să fie circulară; lungimea țevii să fie precisă, materialul să fie omogen.

Arcurile manometrice se execută din alamă, bronz fosforos sau din oțel inoxidabil.

Tubul Bourdon se execută după anumite reguli tehnologice. Operațiile principale sînt: tăierea la lungime, recoacerea pentru eliminarea tensiunilor interne și a ecruisării, dezoxidarea prin decapare după recoacere, umplerea tubului cu un material elastic, curbarea la profilul convenabil, scoaterea umpluturii, îmbătrînirea termică și verificarea elasticității arcului.

## 12.6. Exemple de calcul

**Exemplul 1.** Să se determine deplasarea capătului unui arc tubular de tip Bourdon solicitat la o presiune $p=8$ kgf/cm², cunoscînd: raza axei mediane, $R=55$ mm; grosimea peretelui, $h=0{,}7$ mm; semiaxele secțiunii centrale plan-ovale pe conturul mediu $a=11$ mm, $b=3{,}4$ mm; unghiul la centru, $\gamma=260°$; modulul de elasticitate, $E=1{,}16\times10^6$ kgf/cm²; coeficientul lui Poisson, $\mu=0{,}3$.

*Rezolvare.* Deplasarea capătului arcului:

$$\lambda=p\,\frac{1-\mu^2}{E}\,\frac{R^3}{bh}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{\Gamma\alpha}{\beta^2+\varkappa^2}.$$

Coeficienții $\alpha$, $\beta$, $\Gamma$ se determină cu ajutorul diagramei din fig. 12.10 și fig. 12.12. În funcție de raportul $\frac{a}{b}=\frac{11}{3{,}4}=3{,}24$ și de unghiul la centru, $\gamma$, se obține:

$$\alpha=0{,}47;\quad \beta=0{,}120;\quad \Gamma=5{,}8.$$



Parametrul $\varkappa$ se obține din relația:

$$\varkappa=\frac{Rh}{a^2}=\frac{55\times0{,}7}{11^2}=0{,}318.$$

Deplasarea capătului arcului:

$$\lambda=8\,\frac{1-0{,}3^2}{1{,}16\times10}\cdot\frac{55^3}{3{,}4\times0{,}7}\left(1-\frac{11^2}{3{,}4^2}\right)\frac{5{,}8\times0{,}47}{0{,}120^2+0{,}318^2}\approx3{,}8\ \text{mm}.$$

**Exemplul 2.** Un termometru manometric cu lichid este prevăzut cu un arc Bourdon și cu o termobutelie umplută cu mercur (fig. 12.18), dimensiunile arcului manometric tubular și ale termobuteliei fiind: raza de curbură a axei arcului, $\rho=22$ mm; axa mare și axa mică ale secțiunii plan-ovale, $a=5$ mm; $b=1$ mm; unghiul la centru al arcului, $\gamma=260°$; modulul de elasticitate al materialului, $E=2{,}1\times10^4$ kgf/cm²; limita de curgere, $\sigma_c=100$ kgf/mm²; coeficientul de dilatare liniară al materialului din care este executată termobutelia, $\alpha_t=11{,}7\times10^{-6}$ grd⁻¹; volumul termobuteliei, $V=600$ mm³; coeficientul de dilatare volumetrică a mercurului, $\beta_t=1{,}81\times10^{-4}$ grd⁻¹.

Să se determine deplasarea capătului arcului manometric și să se stabilească grosimea peretelui tubului dacă termometrul manometric trebuie să măsoare temperaturi cuprinse între 0° și 350°.

*Rezolvare.* Datorită încălzirii, volumul mercurului și volumul buteliei cresc, astfel că din butelie se evacuează un volum de mercur dat de relația:

$$\Delta V=(\beta_t-3\alpha_t)V\ \Delta t=(1{,}81\times10^{-}-3\times11{,}7\times10^{-6})\times600\times350$$

$$\Delta V=31{,}8\ \text{mm}^3.$$

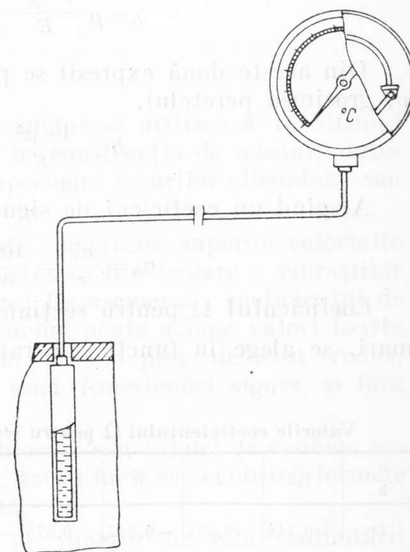



Fig. 12.18

Rezultă că volumul cavității tubului Bourdon se va mări cu $\Delta V=31{,}8$ mm³. Expresia variației cavității tubului Bourdon permite calculul deplasării capătului tubului $\lambda$.

Astfel se obține:

$$\lambda=\frac{\Delta V\alpha\Gamma}{12ab\gamma\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)n}$$

Folosind tabela 12.2 se determină coeficienţii $\alpha$, $n$, în funcţie de raportul $\frac{a}{b}=\frac{5}{1}=5$, iar din diagrama din fig. 12.12 se obţine $\Gamma$, în funcţie de unghiul $\gamma$:

$$\alpha=0{,}408;\ n=0{,}132;\ \Gamma=5{,}6.$$

Efectuînd calculele, se obţine:

$$\lambda=\frac{31{,}8\times0{,}408\times5{,}6}{12\times5\times1\times\frac{2}{260}\times240\left(1-\frac{1^2}{5^2}\right)\times0{,}132}=2{,}7\ \text{mm}.$$

Efortul unitar echivalent

$$\sigma_e=p\,\frac{\rho^2}{a^2}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{2{,}66}{\beta+\varkappa^2}\,|\Omega|,$$

iar deplasarea capătului tubului:

$$\lambda=p\,\frac{1-\mu^2}{E}\,\frac{\rho^3}{bh}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{\Gamma\alpha}{\beta+\varkappa^2}.$$

Din aceste două expresii se poate obţine, prin eliminarea presiunii $p$, grosimea peretelui.

$$h=\frac{1-\mu^2}{E}\,\frac{\rho a^2}{b}\,\frac{\sigma_e}{\lambda}\,\frac{\Gamma\alpha}{2{,}66\,|\Omega|}.$$

Alegînd un coeficient de siguranţă $c=3$, se obţine:

$$\sigma_e=\frac{\sigma_c}{c}=\frac{100}{3}=33{,}3\ \text{kgf/mm}^2.$$

Coeficientul $\Omega$ pentru secţiunea periculoasă, aflată la capetele axei mari, se alege în funcţie de raportul $\frac{a}{b}$, din tabela 12.3.

*Tabela 12.3*

**Valorile coeficientului $\Omega$ pentru secţiunea care se află la capetele axei mari**

| $\frac{a}{b}$ | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Omega$ | −0,446 | −0,494 | −0,547 | −0,575 | −0,593 | −0,605 | −0,613 | −0,620 | −0,625 | −0,629 |

Rezultă $|\Omega|=0{,}593$.

Efectuînd calculele, se obţine:

$$h=\frac{1-0{,}3^2}{2{,}1\times10^4}\,\frac{22\times5^2}{1}\,\frac{33{,}3}{2{,}7}\,\frac{5{,}6\times0{,}408}{2{,}66\times0{,}593}\approx0{,}41\ \text{mm}.$$

# 13

# Elemente elastice din cauciuc

## 13.1. Generalităţi

Elementele elastice sau arcurile de cauciuc se utilizează în ultimul timp pe scară din ce în ce mai mare în construcţia de maşini, datorită unora dintre proprietăţile lor, superioare arcurilor elicoidale sau în foi.

Astfel, cauciucul are un coeficient de amortizare superior celorlalte materiale elastice, putînd realiza o amortizare şi o izolare a vibraţiilor cu mult mai bună decît arcurile metalice. De asemenea, coeficientul de utilizare volumetrică al arcurilor de cauciuc poate atinge valori foarte mari. Prezentînd o construcţie simplă la un preţ de cost redus, aceste arcuri mai prezintă avantajul unei funcţionări sigure şi fără zgomot.

Arcurile de cauciuc se execută din blocuri sau tuburi de cauciuc armate cu plăci, tuburi sau inele metalice, astfel încît să se obţină formele corespunzătoare pentru utilizarea dorită.

Clasificarea arcurilor de cauciuc în funcţie de felul solicitării şi după forma constructivă, conform STAS 6916-64, este dată în tabela 13.1.

În cele ce urmează se descriu mai amănunţit principalele tipuri de arcuri de cauciuc şi se dau unele elemente de calcul pentru cele mai utilizate dintre ele.

*Tabela 13.1*

**Clasificarea arcurilor de cauciuc conform STAS 6916-64**

| | |
|---|---|
| Arcuri de cauciuc de compresiune | Arc placă de cauciuc<br>Arc tubular radial de cauciuc |
| Arc de cauciuc de întindere | Cablu de cauciuc |
| Arcuri de cauciuc de forfecare | Arc-bloc de cauciuc |
| | Arc punte de cauciuc |
| | Arc punte divizată de cauciuc |
| | Arc tubular axial de cauciuc |
| Arc de compresiune-forfecare | Arc cu manta tronconică |
| Arcuri de cauciuc de torsiune | Arc tubular de torsiune cu manșoane egale |
| | Arc tubular de torsiune de egală rezistență |

## 13.2. Arcuri de cauciuc de compresiune

### 13.2.1. Forme constructive

Arcurile-placă de cauciuc se execută din blocuri de cauciuc de formă prismatică sau cilindrică, montate între două plăci metalice (fig. 13.1). Forțele sînt aplicate perpendicular pe plăcile metalice. Avînd în vedere că volumul cauciucului este practic invariabil și că el se poate deforma mult, la montarea arcului trebuie să se prevadă spații necesare deformării laterale a cauciucului. Plăcile metalice, prevăzute cu posibilități de prindere prin nituri sau șuruburi, se îmbină cu blocul de cauciuc prin procedee speciale.

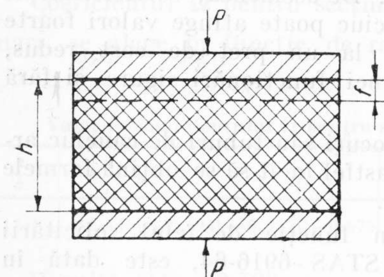


Fig. 13.1

Arcul tubular radial de cauciuc se execută dintr-un tub de cauciuc montat în interiorul unei armături metalice cilindrice, iar în interiorul tubului de cauciuc se montează o bară metalică de formă cilindrică (fig. 13.2). Cauciucul se deformează în sens axial, deformarea radială fiind împiedicată de existența armăturii metalice exterioare.



Arcurile-placă se utilizează ca izolator de vibrații în construcția autovehiculelor, fundațiilor de mașini, mașinilor-unelte și aparatelor de precizie.

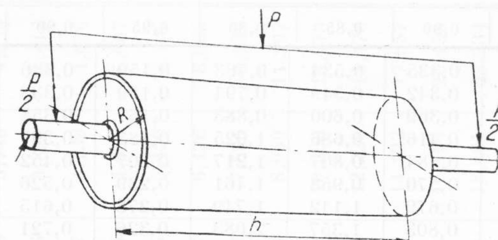


Fig. 13.2

Arcurile tubulare radiale au o utilizare mai restrînsă, fiind utilizate mai ales la suspensii simple, la care trebuie asigurată o deplasare axială a reazemului.

### 13.2.2. Considerații teoretice și de calcul

Cauciucul nu se supune legii lui Hooke și din această cauză, pentru calcul se vor introduce unele relații deduse pe baze experimentale, care ajută la efectuarea unui calcul asemănător cu cele obținute din „Rezistența materialelor".

Rezistența admisibilă:

$$\sigma_a = G\sigma'(\varepsilon', \delta), \tag{13.1}$$

unde:

$$G = 0{,}33\ \chi - 9{,}2, \tag{13.2}$$

$\chi$ fiind duritatea cauciucului folosit, măsurată în unități Shore, pentru temperaturi de lucru de 25–80°C.

Mărimea $\sigma'$, din relația (13.1), este dată în tabela 13.2 în funcție de $\varepsilon'$ și $\delta$.

$$\varepsilon' = 1 - \varepsilon,$$

unde: $\varepsilon$ este deformația relativă;
$\delta$ — raportul dintre aria suprafeței încărcate a aerului și aria liberă a arcului $\delta = \frac{A_i}{A_l}$.

*Tabela 13.2*

**Valorile lui σ′ în funcție de ε′ și δ**
**$G$=1 kgf/cm²**

| δ \ ε′ | Prismă 0,95 | Prismă 0,90 | Prismă 0,85 | Prismă 0,80 | Cilindru 0,95 | Cilindru 0,90 | Cilindru 0,85 | Cilindru 0,80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,5 | 0,159 | 0,335 | 0,534 | 0,763 | 0,159 | 0,336 | 0,535 | 0,763 |
| 0,75 | 0,160 | 0,342 | 0,549 | 0,794 | 0,159 | 0,338 | 0,543 | 0,792 |
| 1,00 | 0,171 | 0,369 | 0,600 | 0,883 | 0,167 | 0,358 | 0,584 | 0,852 |
| 1,25 | 0,191 | 0,416 | 0,686 | 1,025 | 0,183 | 0,397 | 0,656 | 0,970 |
| 1,50 | 0,219 | 0,484 | 0,807 | 1,217 | 0,207 | 0,452 | 0,758 | 1,131 |
| 1,75 | 0,258 | 0,570 | 0,958 | 1,461 | 0,239 | 0,526 | 0,889 | 1,337 |
| 2,00 | 0,303 | 0,679 | 1,142 | 1,749 | 0,278 | 0,615 | 1,047 | 1,582 |
| 2,25 | 0,358 | 0,803 | 1,357 | 2,083 | 0,326 | 0,721 | 1,232 | 1,868 |
| 2,50 | 0,420 | 0,944 | 1,597 | 2,457 | 0,381 | 0,841 | 1,441 | 2,190 |
| 2,75 | 0,493 | 1,164 | 1,868 | 2,875 | 0,441 | 0,980 | 1,679 | 2,553 |
| 3,00 | 0,572 | 1,280 | 2,116 | 3,336 | 0,510 | 1,130 | 1,938 | 2,945 |
| 3,25 | 0,662 | 1,478 | 2,492 | 3,832 | 0,586 | 1,300 | 2,225 | 3,380 |
| 3,50 | 0,756 | 1,687 | 2,843 | 4,371 | 0,672 | 1,478 | 2,531 | 3,844 |
| 3,75 | 0,861 | 1,915 | 3,220 | 4,497 | 0,761 | 1,675 | 2,863 | 4,345 |
| 4,00 | 0,970 | 2,157 | 3,622 | 5,559 | 0,860 | 1,884 | 3,217 | 4,876 |
| 4,25 | 1,092 | 2,416 | 4,051 | 6,210 | 0,963 | 2,112 | 3,596 | 5,443 |
| 4,50 | 1,218 | 2,698 | 4,500 | 6,896 | 1,073 | 2,344 | 3,991 | 6,033 |
| 4,75 | 1,356 | 2,985 | 4,979 | 7,618 | 1,190 | 2,598 | 4,412 | 66,67 |
| 5,00 | 1,494 | 3,286 | 5,477 | 7,378 | 1,318 | 2,860 | 4,855 | 7,322 |

Modulul de elasticitate longitudinal se poate determina de asemenea cu o relație experimentală

$$E = G\frac{d\sigma'(\varepsilon',\ \delta)}{d\varepsilon'}. \tag{13.3}$$

Valorile mărimii $\frac{d\sigma'(\varepsilon',\ \delta)}{d\varepsilon'}$ pentru diferite valori ε′ și δ sînt date în tabela 13.3.

Tabelele 13.2 și 13.3 sînt întocmite pentru sarcini aplicate static.

Pentru calculul dimensiunilor arcului-placă se folosesc relații asemănătoare cu cele ale calculului la compresiune din „Rezistența materialelor":

$$A_{nec} = \frac{P}{\sigma} = \frac{P}{G\sigma'(\varepsilon',\ \delta)}, \tag{13.4}$$

unde: $A_{nec}$ este aria secțiunii transversale a arcului (perpendiculară pe direcția de solicitare).

Deformația arcului (săgeata statică):

$$f_{st} = \frac{Ph}{AE}. \tag{13.5}$$



*Tabela 13.3*

**Valorile funcției $\frac{d\sigma'(\varepsilon',\delta)}{d\varepsilon'}$**
**G=1 kgf/cm²**

| δ \ ε′ | Prismă 1,00 | Prismă 0,95 | Prismă 0,90 | Prismă 0,85 | Prismă 0,80 | Cilindru 1,00 | Cilindru 0,95 | Cilindru 0,90 | Cilindru 0,85 | Cilindru 0,80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,50 | 3,020 | 3,338 | 3,736 | 4,242 | 4,899 | 3,030 | 3,348 | 3,740 | 4,239 | 4,881 |
| 0,75 | 3,022 | 3,394 | 3,873 | 4,489 | 5,311 | 3,080 | 3,366 | 3,821 | 4,412 | 5,185 |
| 1,00 | 3,184 | 3,656 | 4,275 | 5,088 | 6,180 | 3,130 | 3,567 | 4,138 | 4,896 | 5,885 |
| 1,25 | 3,510 | 4,128 | 4,938 | 6,011 | 7,460 | 3,394 | 3,954 | 4,687 | 5,667 | 6,952 |
| 1,50 | 3,996 | 4,793 | 5,846 | 7,242 | 9,111 | 3,802 | 4,513 | 5,450 | 6,706 | 8,347 |
| 1,75 | 4,646 | 5,656 | 6,986 | 8,754 | 11,122 | 4,348 | 5,247 | 6,426 | 8,005 | 10,056 |
| 2,00 | 5,456 | 6,702 | 8,355 | 10,536 | 13,458 | 5,040 | 6,143 | 7,595 | 9,535 | 12,056 |
| 2,25 | 6,426 | 7,939 | 9,935 | 12,576 | 16,196 | 5,876 | 7,206 | 8,959 | 11,297 | 14,338 |
| 2,50 | 7,560 | 9,346 | 11,717 | 15,037 | 19,070 | 6,854 | 8,422 | 10,503 | 13,273 | 16,881 |
| 2,75 | 8,886 | 10,939 | 13,699 | 17,381 | 22,319 | 7,968 | 9,747 | 12,226 | 15,476 | 19,680 |
| 3,00 | 10,312 | 12,687 | 15,876 | 20,132 | 25,851 | 9,230 | 11,321 | 14,122 | 17,857 | 22,737 |
| 3,25 | 11,912 | 14,618 | 18,245 | 23,102 | 29,669 | 10,636 | 13,004 | 16,184 | 20,453 | 26,033 |
| 3,50 | 13,710 | 16,703 | 20,785 | 26,291 | 33,774 | 12,184 | 14,814 | 18,401 | 23,234 | 29,344 |
| 3,75 | 15,650 | 18,963 | 23,504 | 29,691 | 38,112 | 13,868 | 16,791 | 20,794 | 26,203 | 33,333 |
| 4,00 | 17,754 | 21,363 | 26,400 | 33,333 | 42,722 | 15,700 | 18,893 | 23,323 | 29,356 | 37,332 |
| 4,25 | 20,018 | 23,933 | 29,471 | 37,121 | 47,608 | 17,678 | 21,132 | 26,010 | 23,689 | 41,575 |
| 4,50 | 22,444 | 26,510 | 32,695 | 41,155 | 52,751 | 19,796 | 23,502 | 28,848 | 36,215 | 46,032 |
| 4,75 | 25,032 | 29,492 | 36,079 | 45,367 | 58,181 | 22,046 | 26,025 | 31,831 | 39,902 | 50,716 |
| 5,00 | 27,780 | 32,495 | 32,495 | 39,657 | 59,799 | 24,450 | 28,660 | 34,959 | 43,749 | 55,611 |

unde $A = A_{nec}$, din relația (13.4);
$h$ este grosimea blocului de cauciuc.
Din relația (13.5) se deduce:

$$h = \frac{f_{st}}{P} AE. \tag{13.6}$$

Din relațiile (13.3), (13.4) și (13.6) se obține:

$$h = \frac{f_{st}}{P} \frac{P}{G\sigma'(\varepsilon', \delta)} \frac{Gd\sigma'(\varepsilon', \delta)}{d\varepsilon'}. \tag{13.7}$$

Notînd rigiditatea statică a arcului:

$$c_{st} = \frac{P}{f_{st}} = \frac{AE}{h}, \tag{13.8}$$

relația (13.7) devine:

$$h = \frac{1}{c_{st}} \frac{P}{\sigma'(\varepsilon', \delta)} \frac{d\sigma'(\varepsilon', \delta)}{d\varepsilon'}, \tag{13.9}$$

iar (13.5) poate fi pusă sub forma:

$$f_{st} = \frac{P}{c_{st}} = \frac{Ph}{EA} = \frac{\sigma h}{E}. \tag{13.10}$$

Pentru solicitarea dinamică se introduce un coeficient de solicitare dinamică $Q = 1 - 1{,}25$.

Rigiditatea, respectiv săgeata pentru sarcina aplicată dinamic sînt determinate cu relațiile:

$$c_d = Qc_{st} = \frac{QAE}{h}; \tag{13.11}$$

$$f_d = \frac{P}{c_d} = \frac{Ph}{QAE} = \frac{\sigma h}{QE}. \tag{13.12}$$

Lucrul mecanic de deformație:

$$L = \int P df = \frac{1}{2} P \frac{\sigma h}{EQ} = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{E} \frac{V}{Q} = \eta \frac{\sigma'^2 V}{E}, \tag{13.13}$$

unde $\eta$ reprezintă coeficientul de utilizare volumetrică;

$$\eta = \frac{1}{2Q} = 0{,}4 \ldots 0{,}5.$$



Pulsația proprie a arcului:

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_d}{m}} \, [s^{-1}], \tag{13.14}$$

unde $m$ reprezintă masa care vibrează.

Pentru arcul tubular radial de cauciuc, calculul de dimensionare fiind mai dificil, se va folosi o relație care poate fi utilă atît la dimensionare, cît și la calculul forței capabile:

$$P = f \frac{h}{\ln \frac{R}{r}} \cdot 7{,}5 \, G\mu_1\mu_2, \tag{13.15}$$

în care: $P$ este sarcina care acționează radial;
$h$ — lungimea cilindrului;
$R$ — raza interioară a manșonului exterior;
$r$ — raza exterioară a barei interioare;
$f$ — deplasarea radială a manșonului exterior față de cel interior;
$\mu_1$ — un coeficient care ține seamă de variația lui $G$ funcție de dimensiunile și forma arcului;
$\mu_2$ — un coeficient care ține seamă de variația lui $G$ funcție de deformația $f$ și de duritatea cauciucului, $\chi$.

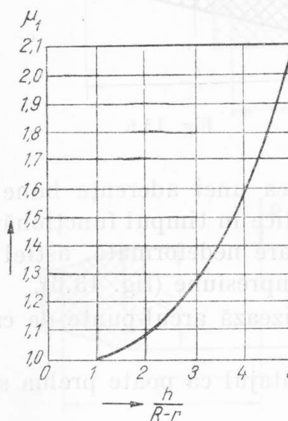



Fig. 13.3

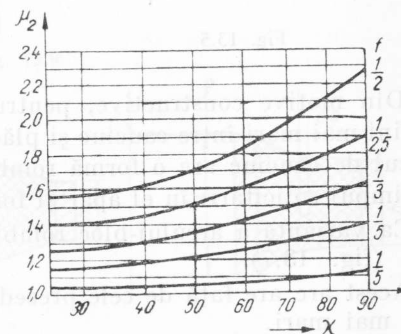



Fig. 13.4

$G$ — se calculează cu relația (13.2). Valorile coeficienților $\mu_1$ și $\mu_2$ sînt date în diagramele din fig. 13.3 și 13.4

## 13.3. Arcuri de cauciuc de forfecare

### 13.3.1. Forme constructive

Arcul-bloc de cauciuc este format dintr-un bloc de cauciuc montat între două plăci metalice. Sarcina acționează paralel cu suprafața de aderență a armăturilor metalice, blocul fiind astfel solicitat la forfecare (fig. 13.5). Acest arc se utilizează, în general, pentru sarcini mici.

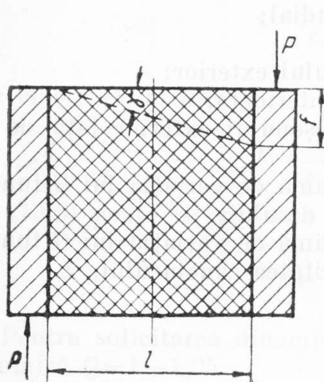



Fig. 13.5

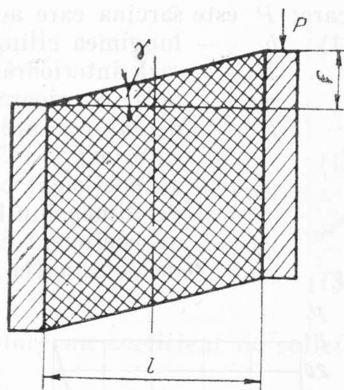



Fig. 13.6

Din motive constructive, pentru realizarea unei aderențe bune la sarcini mai mari între cauciuc și plăcile metalice în timpul funcționării, blocul de cauciuc are o formă rombică în stare nedeformată, astfel că în timpul solicitării în el apar și forțe de compresiune (fig. 13.6).

Ca variantă a arcului-bloc rombic se utilizează arcul-punte de cauciuc (fig. 13.7).

Acest arc are față de cele precedente avantajul că poate prelua sarcini mai mari.

În cazul cînd sînt necesare deformații mari ale arcului de forfecare se folosește varianta arc-puncte divizată de cauciuc (fig. 13.8).

Dacă sarcinile care trebuie preluate au valori faorte mari, se utilizează arcul tubular axial de cauciuc (fig. 13.9).



Acest arc se poate construi și în variante arc tubular axial armat cu țevi metalice de lungimi diferite (fig. 13.10), care prezintă avantajul unei economii de material și a unei repartizări mai uniforme a solicitării.

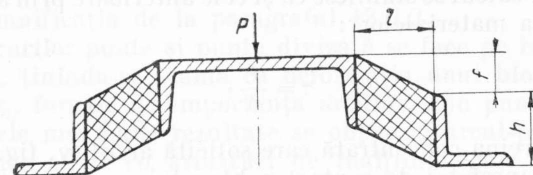



Fig. 13.7

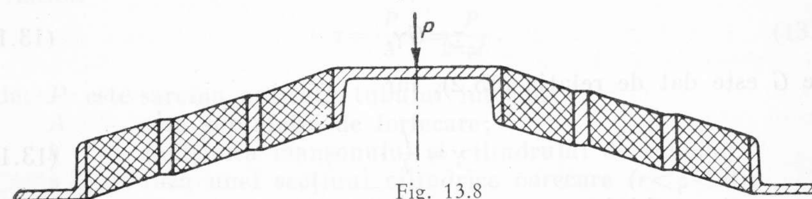



Fig. 13.8

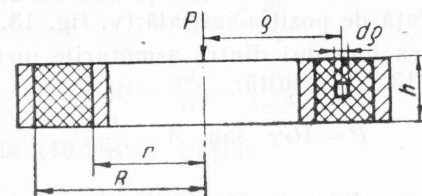



Fig. 13.9

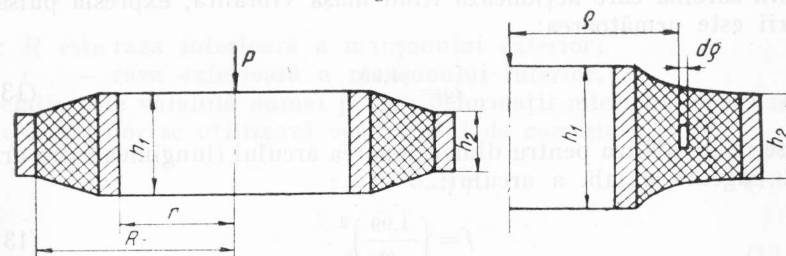



Fig. 13.10

Arcurile de forfecare se utilizează în general la izolarea vibrațiilor, mai ales pentru frecvență mică, putînd prelua sarcini destul de mari.

### 13.3.2. Considerații teoretice și de calcul

Relațiile de calcul se stabilesc ca și cele anterioare prin analogie cu cele din „Rezistența materialelor“:

$$\tau = \frac{P}{A}, \tag{13.16}$$

unde $P$ este sarcina concentrată care solicită arcul (v. fig. 13.5 și 13.6).

$A$ — aria suprafeței de contact a blocului cu o armătură.

Valoarea lui $\tau$ se poate determina cu aproximație cu relația:

$$\tau = G\gamma, \tag{13.17}$$

unde $G$ este dat de relația (13.2), iar

$$\gamma = \frac{f}{l}, \tag{13.18}$$

unde: $\gamma$ este unghiul cu care se înclină fața liberă a blocului după deformare față de poziția inițială (v. fig. 13.5 și 13.6);

$l$ — grosimea blocului dintre armăturile metalice.

Din (13.16) și (13.17) rezultă:

$$P = AG\gamma \quad \text{sau} \quad A = \frac{P}{G\gamma}. \tag{13.19}$$

Dacă utilizarea arcului este făcută în scopul izolării vibrațiilor, singura sarcină care acționează fiind masa vibrantă, expresia pulsației proprii este următoarea:

$$\omega = \frac{4{,}99}{\sqrt{f}}, \tag{13.20}$$

care se poate utiliza pentru dimensionarea arcului (lungimea între armături). Săgeata axială a arcului:

$$f = \left(\frac{4{,}99}{\omega}\right)^2. \tag{13.21}$$

Lungimea în stare statică:

$$l_{st} = \frac{f}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{4{,}99}{\omega}\right)^2, \tag{13.22}$$



iar în stare dinamică:

$$l_d = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{4{,}99}{\omega}\right)^2 Q, \tag{13.23}$$

unde $Q$ are semnificația de la paragraful 13.2.2.

Calculul arcurilor-punte și punte divizată se face pe baza calculului arcului simplu, ținîndu-se seama ca deformația unui bloc să nu depășească 40–60%, funcție de importanța arcului. Din punctul de vedere al utilizării, cele mai bune rezultate se obțin cu arcul-punte divizată.

Arcul tubular axial cu armături de înălțimi egale (fig. 13.9), se calculează în mod asemănător cu cele anterioare.

Astfel:

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{P}{2\pi\rho h}, \tag{13.24}$$

unde: $P$ este sarcina aplicată tubului interior;

$A$ — aria suprafeței de forfecare;

$h$ — înălțimea manșonului și cilindrului de cauciuc;

$\rho$ — raza unei secțiuni cilindrice oarecare ($r < \rho < R$);

$$\tau = G\gamma = G\frac{df}{d\rho}; \tag{13.25}$$

$$df = \frac{\tau d\rho}{G} = \frac{P d\rho}{2\pi\rho h G}. \tag{13.26}$$

Integrînd relația (13.26) se obține:

$$f = \frac{P}{2\pi h G}\int_r^R \frac{d\rho}{\rho} = \frac{P}{2\pi h G} \ln\frac{R}{r}, \tag{13.27}$$

unde: $R$ este raza interioară a manșonului exterior;

$r$ — raza exterioară a manșonului interior.

Relația este valabilă numai pentru deformații mici. La valori mari ale deformațiilor se utilizează coeficientul de corecție $z$,

$$z = 1 - 0{,}3\sqrt{\gamma}, \tag{13.28}$$

unde:

$$\gamma = \frac{f}{R-r} \tag{13.29}$$

Săgeata în acest caz se determină cu relația:

$$f = \frac{P}{2\pi h G z} \ln\frac{R}{r} = (R-r)\gamma. \tag{13.30}$$

Rigiditatea arcului pentru sarcina aplicată static se determină cu relația corectată:

$$c_{st}=\frac{2\pi hG(1-0{,}45\sqrt{\gamma})}{ln\frac{R}{r}}, \qquad (13.31)$$

și pentru sarcina aplicată dinamic:

$$c_d=Qc_{st}=\frac{2\pi HGQ(1-0{,}35\sqrt{\gamma})}{ln\frac{R}{r}} \qquad (13.32)$$

unde $z_1=1-0{,}45\sqrt{\gamma}$ este un coeficient de corecție, iar $Q$ are semnificația de la paragraful 13.2.2.

Din relațiile (13.30) și (13.32) se obține relația pentru dimensionarea arcului tubular axial:

$$R-r=\frac{P}{c_d}\frac{Q}{\gamma}\frac{1-0{,}45\sqrt{\gamma}}{1-0{,}3\sqrt{\gamma}} \qquad (13.33)$$

Arcul tubular axial se poate executa și în varianta cu manșoane de lungimi inegale (fig. 13.10).

În acest caz se poate alege pentru grosimea tubului de cauciuc o variație liniară cu raza.

Înălțimea tubului de cauciuc la o rază oarecare, $\rho$, este dată de relația:

$$h=h_2+\frac{h_1-h_2}{R-r}(R-\rho), \qquad (13.34)$$

în care: $R$ este raza interioară a manșonului exterior;
$r$ — raza exterioară a manșonului interior;
$h_1$ — înălțimea manșonului interior;
$h_2$ — înălțimea manșonului exterior.

Săgeata

$$f=\int_r^R\frac{P}{2\pi G}\frac{1}{\rho\left[h_2+\frac{h_1-h_2}{R-r}(R-\rho)\right]}d\rho \qquad (13.35)$$

sau efectuînd calculele

$$f=\frac{P}{2\pi G}\frac{R-r}{h_1R-h_2r}\ ln\frac{Rh_1}{rh_2}. \qquad (13.36)$$



Pentru deformații mari, relația (13.36) se corectează cu ajutorul factorului $z$, dat de relația (13.28):

$$f=\frac{P}{2\pi G}\frac{R-r}{h_1R-h_2r}\frac{1}{(1-0{,}3\sqrt{\gamma})}\ ln\frac{Rh_1}{rh_2}. \qquad (13.37)$$

O variantă a arcului cu manșoane inegale este arcul la care tubul de cauciuc se construiește ca un solid de egală rezistență, deci cu $\tau$=const.

Din relația (13.24) rezultă:

$$h=\frac{P}{2\pi\rho\tau}. \qquad (13.38)$$

Dacă $\tau$ este constant, variația lui $h$ se face după o hiperbolă echilateră.

Relațiile principalelor caracteristici ale arcului sînt date în cele ce urmează:

Săgeata

$$f=\int_r^R\frac{\tau}{G}d\rho=\frac{\tau}{G}(R-r). \qquad (13.39)$$

Avînd în vedere relația (13.38)

$$R=\frac{P}{2\pi h_2\tau}\ \text{și}\ r=\frac{P}{2\pi h_1\tau}. \qquad (13.40)$$

Deci relația (13.39) devine:

$$f=\frac{P}{2\pi G}\left(\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_1}\right). \qquad (13.41)$$

Introducînd factorul de corecție $z$,

$$f=\frac{1}{1-0{,}3\sqrt{\gamma}}\cdot\frac{P}{2\pi G}\left|\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_1}\right|=\frac{1}{1-0{,}3\sqrt{\gamma}}\cdot\frac{\tau}{G}(R-r). \qquad (13.42)$$

Rigiditățile statică și dinamică au valorile corectate cu $z_1$:

$$c_{st}=\frac{AG}{R-r}(1-0{,}45\sqrt{\gamma}); \qquad (13.43)$$

$$c_d=\frac{QAG}{R-r}(1-0{,}45\sqrt{\gamma}).$$

Din relațiile (13.42) și (13.43) se obține o relație utilă pentru dimensionare:

$$R-r=\frac{PQ}{\gamma c_d}\frac{1-0{,}45\sqrt{\gamma}}{1-0{,}3\sqrt{\gamma}}. \qquad (13.44)$$

## 13.4. Arc tubular de torsiune

### 13.4.1. Forme constructive

Standardul prevede două forme constructive pentru aceste tipuri de arcuri de cauciuc: arc tubular de torsiune cu manşoane egale (fig. 13.11) şi arc tubular de torsiune de egală rezistenţă (manşoane neegale) (fig. 13.12).

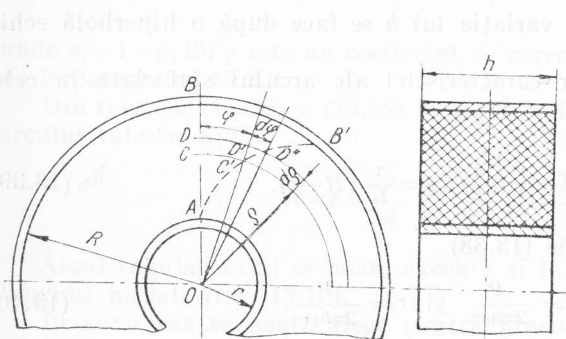



Fig. 13.11

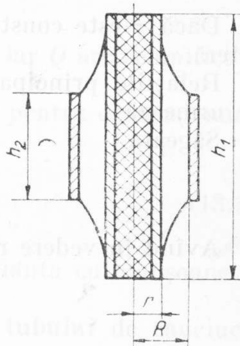



Fig. 13.12

Ele se compun din două manşoane metalice coaxiale, între care se montează un tub cu pereţi groşi din cauciuc. Aceste arcuri se utilizează la realizarea suspensiei la automobile, avioane etc. Ele pot înlocui bare de torsiune în cazurile cînd se cere o amortizare superioară.

### 13.4.2. Consideraţii teoretice şi de calcul

Sub acţiunea momentului de răsucire $M_t$, raza $AB$ (fig. 13.11) devine curba $AB'$. Deformaţia unghiulară la raza $\rho$ este $\varphi$ (arcul $CC'$), iar la raza $\rho = d\rho$ deformaţia devine $\varphi + d\varphi$ (arcul $DD'$). Unghiul $D'C''D'' = \gamma$ şi apare datorită forfecării. Pentru unghiul $\gamma$ mic

$$\text{tg}\,\gamma \approx \gamma = \frac{D'D''}{C'D''} = \frac{(\rho + d\rho)d\varphi}{d\rho} = \frac{\rho d\varphi}{d\rho}. \qquad (13.45)$$



Efortul de forfecare produs de $M_t$ pe suprafaţa cilindrică de rază $\rho$ are valoarea:

$$\tau = \frac{T}{A} = \frac{M'}{2\pi\rho^2 h}, \qquad (13.46)$$

unde: $T$ este forţa de forfecare în secţiunea cilindrică de rază $\rho$;
$A$ — aria secţiunii solicitate la forfecare;
$h$ — lungimea tubului de cauciuc.

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{\rho d\varphi}{d\rho}, \qquad (13.47)$$

de unde:

$$d\varphi = \frac{\tau}{G}\frac{d\rho}{\rho} = \frac{M_t d\rho}{2\pi\rho^3 hG}. \qquad (13.48)$$

Integrînd se obţine:

$$\varphi = \frac{M_t}{2\pi\, hG}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right) [\text{rad}]$$

(13.49)

sau

$$\varphi = 57{,}3\,\frac{M_t}{2\pi\, hG}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right) [\text{grd}],$$

unde: $R$ este raza interioară a manşonului exterior;
$r$ — raza exterioară a manşonului interior.

În cazul deformaţiilor mari, în relaţia (13.45) $\text{tg}\,\gamma \neq \gamma$ şi din relaţiile 13.47) şi (13.48) se obţine:

$$\rho\frac{d\varphi}{d\rho} = \text{tg}\left(\frac{M_t}{2\pi\rho^2 hG}\right) \qquad (13.50)$$

sau

$$d\varphi = \frac{1}{\rho}\,\text{tg}\left(\frac{M_t}{2\pi\rho^2 hG}\right) d\rho. \qquad (13.51)$$

Integrînd se obţine:

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \varphi = \int_r^R \frac{1}{\rho}\,\text{tg}\left(\frac{M_t}{2\,\rho^2 hG}\right) d\rho. \qquad (13.52)$$

După efectuarea calculelor se obţine:

$$\varphi = \frac{M_t}{4\,\pi hG}\left[\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{M_t}{2\,\pi hG}\right)^2\left(\frac{1}{r^6} - \frac{1}{R^6}\right) + \dots\right]. \qquad (13.53)$$

Pentru calculul practic s-au reținut numai cei doi termeni ai dezvoltării în serie.

Pentru ca relația să fie valabilă trebuie îndeplinită condiția:

$$\gamma = \frac{M_t}{2\pi\rho^3 hG} \leq \frac{\pi}{2}. \tag{13.54}$$

În cazul arcului tubular de torsiune de egală rezistență manșoanele metalice au lungimi diferite (fig. 13.12).

În tot materialul trebuie să existe același efort de forfecare

$$\tau = \frac{M_t}{2\pi\rho^2 h} = const \tag{13.55}$$

sau

$$\rho^2 h = \frac{M_t}{2\pi\tau} = const. \tag{13.56}$$

Pentru valorile extreme ale lui $\rho$,

$$\tau = \frac{M_t}{2\pi r^2 h_1} = \frac{M_t}{2\pi R^2 h_2}, \tag{13.57}$$

de unde rezultă:

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{h_1}{h_2} \tag{13.58}$$

Din relația 13.47, valabilă pentru deformații mici, se obține:

$$\varphi = \frac{\tau}{G}\, ln \frac{R}{r} \,[\text{rad}], \tag{13.59}$$

sau

$$\varphi = 57{,}3\, ln \frac{R}{r}\, \text{tg}\left(\frac{M_t}{2R^2 h_2 G}\right) [\text{grd}]. \tag{13.60}$$

## 13.5. Nomograme de calcul

În cele ce urmează se dă o nomogramă care se utilizează la calculul rapid al săgeții arcurilor-placă de cauciuc pentru compresiune. Nomograma din fig. 13.13 este întocmită după modelul folosit de U. S. Rubber Company.



Nomograma cuprinde:

— o scară curbilinie pe care sînt trasate valorile raportului P/A dintre forța care comprimă arcul și suprafața pe care se repartizează sarcina;

— o scară rectilinie pentru modulul de elasticitate $E$;

— o scară rectilinie pentru raportul de formă geometric $\frac{D}{h}$;

— o scară de bază, $x$, de legătură;

— o scară curbilinie pentru săgeți.

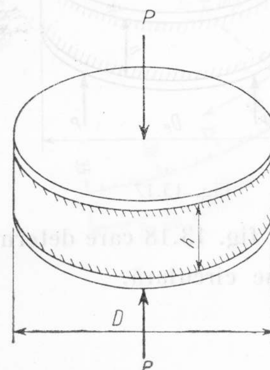



Fig. 13.14

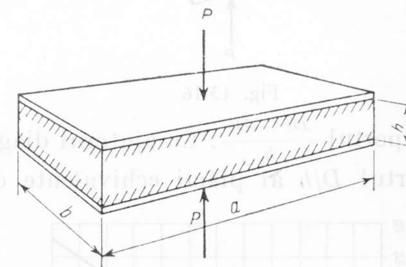



Fig. 13.15

Nomograma este trasată pentru o placă de formă cilindrică (fig. 13.14) cu diametrul $D$ și înălțimea $h$. Pentru plăci de formă dreptunghiulară (fig. 13.15) se folosesc două scări auxiliare pentru determinarea valorii $D/h$ pe scara raportului de formă geometrică:

— scara rectilinie $a/b$, raportul dintre lungimea și lățimea plăcii;

— scara raportului $b/h$, dintre lățimea și grosimea plăcii.

Ca exemplu de utilizare se poate da cel al unei plăci dreptunghiulare, deoarece apare în plus operația de determinare a raportului $D/h$. Se unesc printr-o dreaptă valorile $a/b$ și $b/h$, iar la intersecția ei cu scara lui $D/h$ se obține valoarea căutată. Unind punctul corespunzător valorii $D/h$ cu punctul corespunzător lui $E$ pe scara modulului de elasticitate, se obține pe scara $x$ punctul de legătură care, unit cu valoarea $P/A$, dă prin prelungirea acestei drepte valoarea lui $f$, pe scara săgeților.

Pentru plăci de alte forme se va face asimilarea cu placa de formă cilindrică cu secțiune circulară.

Pentru placa de cauciuc de secţiune triunghiulară (fig. 13.16), asimilarea se face determinînd diametrul cercului înscris în triunghi. Pentru o placă de formă inelară (fig. 13.17), asimilarea se face funcţie

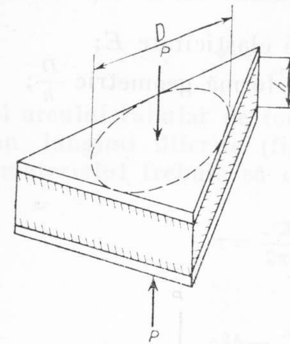


Fig. 13.16

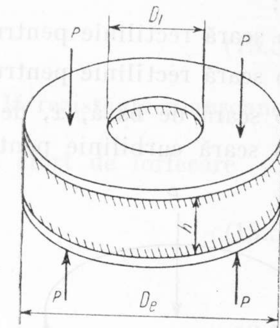


Fig. 13.17

de raportul $\frac{De-Di}{h}$. Cu ajutorul diagramei din fig. 13.18 care determină raportul $D/h$ al plăcii echivalente de secţiune circulară.

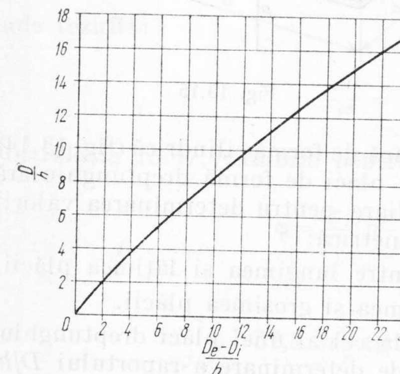


Fig. 13.18

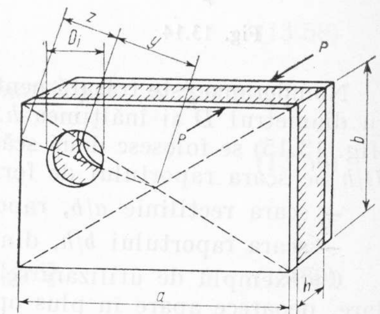


Fig. 13.19

Deoarece în practică se utilizează de multe ori plăci dreptunghiulare prevăzute cu un orificiu pentru bulonul de prindere (fig. 13.19)*, pentru

* În fig. 13.19 s-a notat cu:
$D_i$ este diametrul orificiului;
$z$, $y$ — distanţele centrului orificiului la marginea plăcii şi la centrul plăcii, măsurate pe dreapta care uneşte centrul orificiului cu centrul plăcii.

calcul se determină, cu ajutorul diagramei, diametrul echivalent $D'$, pentru placa fără orificiu și apoi, cu ajutorul relației (13.61), se calculează diametrul echivalent pentru placa cu orificiu:

$$D = D' - \frac{b}{a}\left(\frac{z}{z+y}\right) D_i. \qquad (13.61)$$

## 13.6. Indicații tehnologice

La proiectarea arcurilor de cauciuc trebuie respectate o serie de prescripții care influențează funcționarea și îndeosebi durata de funcționare a arcului. Pentru evitarea degradării acestor arcuri se recomandă rotunjirea tuturor colțurilor și muchiilor ascuțite, care constituie amorse pentru viitoarele defecte (fig. 13.20).

Aderența între metal și cauciuc este un alt factor determinant pentru o bună funcționare. Rezistența legăturii dintre cauciuc și placă trebuie să se apropie de rezistența cauciucului. Pentru aceasta, plăcile metalice trebuie alămite pe cale electrolitică sau acoperite în prealabil cu plăci de cauciuc dur.

Cauciucul trebuie să aibă o compoziție adecvată scopului. De reținut că o bună aderență o are cauciucul sintetic.

La montarea arcului de cauciuc se va ține seamă ca blocurilor de cauciuc să li se permită deformarea liberă; piesele metalice ale arcului în contact cu mașina să nu aibă contact cu fundația (fig. 13.21)

Piesele metalice în contact cu cauciucul nu trebuie să prezinte muchii ascuțite, care îl degradează (fig. 13.22).

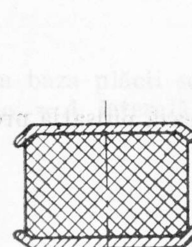


Fig. 13.20

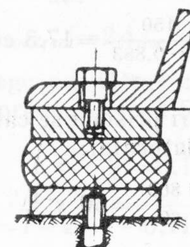


Fig. 13.21

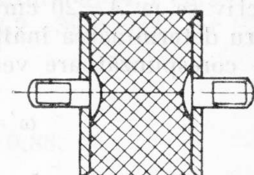


Fig. 13.22

Pentru valorile rezistențelor realizabile pentru aderență, prin folosirea diferitelor procedee de acoperire prealabilă a plăcilor, în tabela 13.4 sînt date valori orientative.

*Tabela 13.4*

**Valorile rezistenței de aderență pentru diferite procedee de acoperire prealabilă a plăcilor**

| Procedeul | Rezistența, kgf/cm² | Procedeul | Rezistența, kgf/cm² |
|---|---|---|---|
| Acoperire cu cauciuc dur | 50—60 | Hidroclorură de cauciuc | 60—70 |
| Alămire | 50—70 | Novolac-rezarcin | 35—45 |
| Latex-albumin | 30—40 | | |
| Clor-cauciuc | 50—60 | Desmodur—*R* | 50—60 |

## 13.7. Exemple de calcul

**Exemplul 1.** Să se dimensioneze un arc-placă de cauciuc de compresiune pentru susținerea unui ventilator cu greutatea de 150 kgf, care lucrează cu turația de 1 800 rot/min. Se va ține seamă că arcul să izoleze vibrațiile.

Aria necesară se calculează cu relația (13.4). Alegînd un cauciuc cu duritatea $\chi=60$ unități Shore, cu relația (13.2) se calculează:

$$G=0{,}33\cdot 60-9{,}2=9{,}8 \text{ kgf/cm}^2.$$

Se admit pentru $\delta$ și $\varepsilon'$ valori preliminare, care sînt apoi verificate, refăcînd calculul prin încercări. Se consideră $\delta=1$ și $\varepsilon'=0{,}8$.

În funcție de aceste valori, din tabela (13.2) rezultă $\sigma'=0{,}883$. Aplicînd relația (13.4) se obține:

$$A_{nec}=\frac{150}{9{,}8\cdot 0{,}883}=17{,}3 \text{ cm}^2.$$

Constructiv se ia $A=20$ cm².

Pentru determinarea înălțimii prismei se calculează pulsația proprie. Pulsația corespunzătoare ventilatorului:

$$\omega'=\frac{1\,800}{60}=30 \; s^{-1}.$$

Pentru evitarea sigură a rezonanței, pentru arcurile de cauciuc se recomandă:

$$\omega'=3\omega,$$

de unde:

$$\omega=\frac{\omega'}{3}=\frac{30}{3}=10 s^{-1}.$$



Din relația (13.21) se obține:

$$f=\left(\frac{4{,}99}{\omega}\right)^2=\left(\frac{4{,}99}{10}\right)^2=0{,}25 \text{ cm},$$

de unde coeficientul de rigiditate:

$$c=\frac{P}{f}=\frac{150}{0{,}25}=600 \text{ kgf/cm}.$$

Înălțimea arcului:

$$l_{st}=\frac{AE}{c}=\frac{A}{c}\,\frac{d\sigma'(\varepsilon',\delta)}{d\varepsilon'}=\frac{P}{G\sigma'(\varepsilon',\delta)}\cdot\frac{1}{c}\,G\,\frac{d\sigma'(\varepsilon'\delta)}{d\varepsilon'},$$

unde s-a introdus valoarea lui $A$ dată de relația (13.4). Din tabela (13. 3 rezultă $\frac{d\sigma'(\varepsilon'\delta)}{d\varepsilon'}=6{,}180.$

Deci:

$$l_{st}=\frac{150\times 6{,}180}{0{,}883\times 600}=1{,}75 \text{ cm}.$$

Deoarece sarcina se aplică dinamic

$$l_d=Ql_{st}=1{,}25\times 1{,}75=2{,}18 \text{ cm}.$$

Se ia $l_d=2{,}2$ cm.

Se verifică valorile lui $\delta$ și $\varepsilon'$:

$$\delta=\frac{A_{\hat{i}nc\breve{a}rcat}}{A_{liber}}=\frac{40}{39{,}6}=1{,}01.$$

$$A_{\hat{i}nc\breve{a}rcat}=2A_{nec}=40 \text{ cm}^2.$$

Pentru baza plăcii se alege un pătrat cu latura $a=4{,}5$ cm. $A_{liber}=A$ laterală a prismei $=4\times 4{,}5\times 2{,}2=39{,}6$ cm², iar

$$\varepsilon=\frac{f}{h}=0{,}114;$$

$$\varepsilon=1-\varepsilon=1-0{,}114=0{,}88,$$

valori apropiate de cele presupuse inițial.

**Exemplul 2.** Un arc-placă de cauciuc de compresiune are baza un pătrat cu latura $a=16$ cm, iar înălțimea $h=4$ cm, duritatea cauciucului $\chi=50$ unități Shore.

Se cere sarcina maximă admisă și pulsația proprie pentru o deformație procentuală de 20%.

Aria suprafeţei solicitată la compresiune:

$$A=a^2=16^2=256 \text{ cm}^2.$$

Forţa capabilă:

$$P=AG\sigma'(\varepsilon', \delta),$$

unde

$$G=0{,}33\times 50-9{,}2=7{,}3 \text{ kgf/cm}^2;$$

$$\varepsilon'=1-\varepsilon=0{,}80;$$

$$\delta=\frac{A_{\hat{i}nc\breve{a}rcat}}{A_{liber}}=\frac{2A}{A_{lateral\breve{a}}}=\frac{2\times 256}{4\times 16\cdot 4}=2.$$

Din tabela (13.2) pentru valorile $\varepsilon'$ şi $\delta$ se obţine:

$$\sigma'(\varepsilon', \delta)=1{,}749.$$

Forţa capabilă:

$$P=256\times 7{,}3\times 1{,}749=3\,260 \text{ kgf}.$$

Rigiditatea arcului este dată de relaţia (13.11):

$$c_d=Q\frac{AE}{h}=\frac{QA}{h}=G\frac{d\sigma'(\varepsilon', \delta)}{d\varepsilon'}.$$

Din tabela 13.3, corespunzător lui $\delta$ şi $\varepsilon'$ calculaţi, se găseşte:

$$\frac{d\sigma'(\varepsilon', \delta)}{d\varepsilon'}=13{,}458.$$

Astfel

$$c_d=\frac{1{,}25\times 256}{4}\times 7{,}3\times 13{,}458=7920 \text{ kgf/cm}.$$

De unde pulsaţia proprie, conform relaţiei (13.14), are valoarea:

$$\omega=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{cd}{m}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{7\,920\times 981}{3\,260}}=7{,}8 \text{ s}^{-1}.$$

Pentru siguranţa izolării contra vibraţiilor, pulsaţia motorului se alege

$$\omega'=3\,\omega.$$

Deci turaţia lui va fi:

$$n=3\times 7{,}8\times 60=1\,400 \text{ rot/min}.$$



**Exemplul 3.** Se cer dimensiunile unui arc supus la forfecare de o forţă de 200 kgf, la o pulsaţie proprie de 8 $s^{-1}$ şi o deformare relativă $\gamma=0{,}3$. Cauciucul ales are duritate $\chi=60$ unităţi Shore.

Aria arcului este dată de relaţia (13.19):

$$A=\frac{P}{G}\frac{1}{\gamma},$$

unde:

$$G=0{,}33\chi-9{,}2=0{,}33\times 60-9{,}2=9{,}8 \text{ kgf/cm}^2.$$

Înlocuind în relaţia ariei, se obţine:

$$A=\frac{200}{9{,}8\cdot 0{,}3}=68 \text{ cm}^2.$$

Pentru săgeata se aplică relaţia (13.21):

$$f=\left(\frac{4{,}99}{\omega}\right)^2=\left(\frac{4{,}99}{8}\right)^2=0{,}39 \text{ cm}.$$

Grosimea blocului:

$$l_d=\frac{f}{\gamma}Q=\frac{0{,}39}{0{,}3}\,1{,}25=1{,}62 \text{ cm}.$$

Se alege constructiv $l_d=1{,}7$ cm.

Se verifică aderenţa:

$$\sigma_{aderen\c{t}\breve{a}}=\frac{P}{A}=\frac{200}{68}=2{,}95 \text{ kgf/cm}^2,$$

care este o valoare admisibilă.

**Exemplul 4.** Pentru arcul-punte din fig. 13.23. se cere să se stabilească sarcina admisibilă şi pulsaţia proprie. Cauciucul folosit are duritatea 60 unităţi Shore, iar deformaţia admisă are valoarea maximă 30%.

Aria secţiunii de forfecare se calculează cu ajutorul figurii:

$$A=2\times 4\times 10=80 \text{ cm}^2.$$

Pentru duritatea aleasă, $G=9{,}8$ kgf/cm².

Deci sarcina capabilă:

$$P=AG=80\times 9{,}8\times 0{,}3=235 \text{ kgf}.$$

Pulsaţia proprie:

$$\omega=4{,}99\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon\cdot l}}=4{,}99\sqrt{\frac{1{,}25}{0{,}3\cdot 2{,}5}}=6{,}3\ s^{-1}.$$

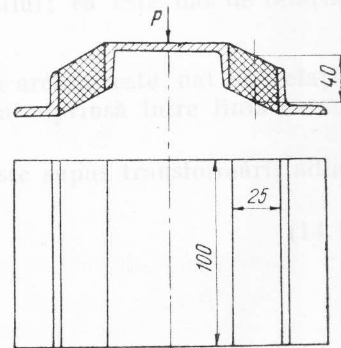



Fig. 13.23

**Exemplul 5.** Un arc tubular de cauciuc suportă o sarcină axială de 400 kgf la o frecvență proprie $\omega=10\ s^{-1}$, avînd o constantă dinamică $c_d=520$ kgf/cm. Se cere dimensionarea arcului, dacă deformația admisă este de 0,4. Cauciucul ales are duritatea 55 unități Shore.

Pentru calculul dimensiunilor $R$, $r$ și $h$ se aplică relațiile(13.32) și (13.33), unde $G=0{,}33\times55-9{,}2=9$ kgf/cm²;

$$R-r=\frac{400}{520}\cdot\frac{1{,}25}{0{,}4}\cdot\frac{1-0{,}45\sqrt{0{,}4}}{1-0{,}3\sqrt{0{,}4}};$$

$$\frac{h}{ln\frac{R}{r}}=\frac{520}{1{,}25\times2\times\pi\times9\,(1-0{,}45\sqrt{0{,}4})}.$$

Efectuînd calculele se obține:

$$R-r=2{,}19;$$

$$\frac{h}{ln\frac{R}{r}}=9{,}9.$$

Se alege constructiv $r=4$ cm, deci $R=6{,}2$ cm.

$$h=9{,}9\,ln\frac{R}{r}=9{,}9\times2{,}3026\times lg\,1{,}55=4{,}33\ \text{cm}.$$

Valoarea constructivă $h=4{,}5$.

În concluzie, dimensiunile arcului tubular sînt: $R=6{,}2$, $r=4$ cm, $h=4{,}5$ cm.

# 14

# Arcuri pneumatice

Arcurile pneumatice s-au impus în ultima vreme mai ales în construcția autobuzelor moderne și a materialului rulant, la realizarea suspensiilor pneumatice și mecano-pneumatice, în special datorită posibilității de a realiza o rigiditate variabilă.

La arcurile pneumatice, elementul elastic este format din aer sau dintr-un alt gaz comprimat.

În cazul unui arc pneumatic, caracteristica arcului se exprimă tot ca o relație între încărcare (sarcină) și săgeata: $P=\varphi(f)$.

Rigiditatea constituie o caracteristică foarte importantă pentru alegerea și funcționarea corespunzătoare a arcului; ca este dat de relația:

$$c=\frac{dP}{df}$$

Lucrul mecanic produs prin deformarea arcului este dat de relația $L=\int P\cdot df$ și este reprezentat prin suprafața cuprinsă între linia caracteristică a arcului și axa absciselor.

La arcurile pneumatice gazul utilizat este supus transformării adiabatice după legea:

$$pV^k=\text{const}, \tag{14.1}$$

unde: $p$ este presiunea;

$V$ — volumul gazului utilizat;

$$k=\frac{c_p}{c_V}=\frac{\text{căldura specifică la presiune constantă}}{\text{căldura specifică la volum constant}}.$$

Dacă se consideră o coloană de gaz de înălţime $h_0$ de volum $V_0$ şi presiune $p_0$, care susţine într-un cilindru o masă $m$, care are o suprafaţă de contact de arie $A$ (fig. 14.1), forţa $P$ produsă de presiunea gazului, care susţine masa, este dată de relaţia:

$$P=Ap_0=mg. \tag{14.2}$$

Dacă se dă masei un impuls, volumul gazului se va modifica cu $\Delta V_0$ şi se va produce o mişcare oscilatorie, astfel că şi înălţimea coloanei de gaz se va modifica cu $\Delta h$; totodată se va modifica şi aria suprafeţei de susţinere cu $\Delta A$.

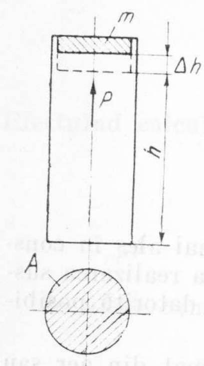


Fig. 14.1

Ţinînd seama de relaţia (14.1) se poate scrie:

$$p_0V_0^k=p\,.\,V^k=\text{const sau} \tag{14.3}$$

$$p_0V_0^k=\frac{P}{A}\,[(h_0-\Delta h)A]^k, \tag{14.4}$$

de unde

$$P=\frac{p_0V_0^k}{(h_0-\Delta h)^k\,A^{k-1}} \tag{14.5}$$

În acest caz rigiditatea arcului:

$$c=\frac{dP}{dh}=\frac{p_0V_0^k\,k}{(h_0-\Delta h)^{k+1}A^{k-1}}. \tag{14.6}$$

Ecuaţia mişcării oscilatorii a masei $m$, susţinută de gaz, este următoarea:

$$m\frac{d^2h}{dt^2}+ch=0; \tag{14.7}$$

perioada acestei mişcări

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}, \tag{14.8}$$

iar frecvenţa

$$n=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{c}}. \tag{14.9}$$

Ţinînd seamă de relaţia rigidităţii unui arc pneumatic şi de relaţiile: $p_0=\frac{P}{A}$ şi $P=mg$, expresia frecvenţei devine:

$$n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{p_0V_0^k\,k}{m(h_0-\Delta h)^{k+1}A^{k-1}}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Akg}{V_0}}. \tag{14.10}$$



Această relaţie este foarte importantă pentru dimensionarea unui arc pneumatic, deoarece din ea rezultă că frecvenţa unui astfel de arc este direct proporţională cu rădăcina pătrată a suprafeţei de contact şi a raportului $k$ şi totodată invers proporţională cu volumul $V_0$ al coloanei de gaz utilizat.

Arcurile pneumatice folosite în construcţia autovehiculelor trebuie să aibă o frecvenţă cît mai joasă. Acest lucru se realizează deci cu un volum $V$ mare, o secţiune activă $A$ mică şi un exponent politropic $k$ mic.

În funcţie de frecvenţa proprie a arcurilor pneumatice se întîlnesc două tipuri constructive distincte:

— arcuri pneumatice cu burduf pentru frecvenţa $n\leqslant 80$ min$^{-1}$
— arcuri pneumatice cu membrană pentru frecvenţe $n=80...100$ min$^{-1}$.

Arcurile pneumatice de tip cu burduf sînt executate dintr-o anvelopă de cauciuc cu cord de nailon avînd forma unor circumvoluţiuni suprapuse. În fig. 14.2 sînt reprezentate schemele a două variante constructive ale acestor burdufuri pentru arcul pneumatic. Prima variantă (fig. 14.2, *a*) fiind un tip obişnuit, iar a doua (fig. 14.2, *b*) reprezentînd un burduf cu autoetanşare.

În cazul burdufului cu autoetanşare, armătura 2 are o formă teşită, pentru evitarea frecării între culele vecine în momentul comprimării, cînd ele se apropie. La tipul obişnuit aceste armături au secţiune rotundă (1).

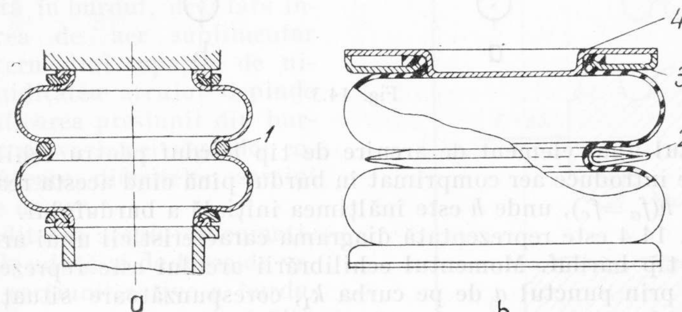


Fig. 14.2

Prinderea burdufului pe suprafeţele de reazem se face cu o bună etanşare prin inelul cu secţiune în formă de $U$ 3, talonul burdufului fiind presat pe locaşul conic al reazemului 4. Acest sistem de prindere

este posibil datorită presiunii interioare din burduf, eliminînd organele clasice de strîngere cum ar fi șuruburile, care pot provoca avarii bandajului de cauciuc, datorită proeminențelor.

În fig. 14.3 sînt reprezentate schematic două variante de elemente de arc pneumatic cu membrană, prima (fig. 14.3, *a*) fiind de tipul simplu ghidat, iar a doua (fig. 14.3, *b*) fiind de tipul dublu ghidat.

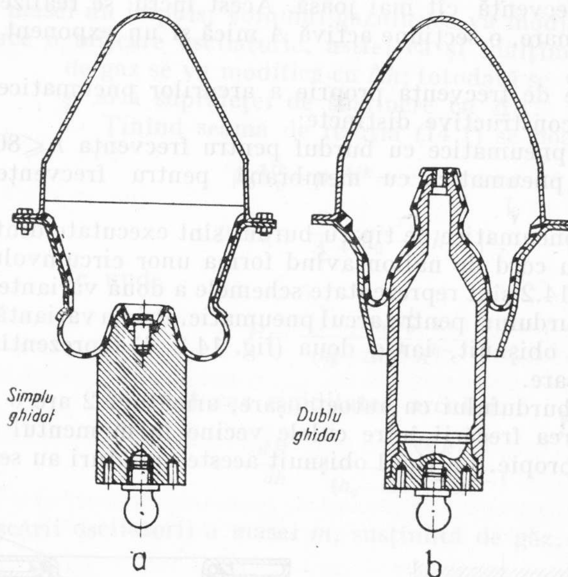



Fig. 14.3

În cazul unui element de arcuire de tip burduf pentru echilibrarea sarcinii se introduce aer comprimat în burduf pînă cînd acesta realizează înălțimea $h(f_a=f_c)$, unde $h$ este înălțimea inițială a burdufului.

În fig. 14.4 este reprezentată diagrama caracteristicii unui arc pneumatic de tip burduf. Momentul echilibrării arcului este reprezentat în diagramă prin punctul $a$ de pe curba $k_1$, corespunzătoare situației $A$ a burdufului încărcat cu o sarcină $G$, săgeata fiind $f_a$. La o creștere $\Delta G_1$ a sarcinii $G$, burduful se comprimă, cantitatea de aer din burduf fiind neschimbată, burduful ia forma și poziția indicată în figură, iar pe caracteristica $k_1$ a arcului prin $b$, săgeata devenind $f_b$. Pentru a redresa echilibrul burdufului, sub comanda automată a unei supape de nivel se introduce din nou aer în burduf pînă revine la săgeata inițială $f_c=f_a$,



corespunzătoare poziției $C$ a burdufului, indicată în figură și poziției $c$ a caracteristicii $K_2$, care diferă de prima caracteristică $K_1$. Dacă se descarcă arcul de surplusul de sarcină, înălțimea lui crește ca în poziția $D$, iar săgeata devine $f_d$, punctul corespunzător pe diagramă, $d$, aflîndu-se pe aceeași caracteristică, $K_2$.

Dacă creșterea sarcinii este mai mare ciclul este indicat în figură prin punctele $a$, $b'$ $c'$ $d'$ și, așa cum rezultă din figură, punctele $c'$ și $d'$ se vor afla pe o altă caracteristică, $K_3$.

Rezultă că pentru diferite valori ale sarcinii corespund caracteristici de rigiditate diferite pentru arcul pneumatic, astfel că, în ansamblu, arcul pneumatic lucrează pe un fascicul de curbe caracteristice $K_1$, $K_2$...$K_n$.

Pentru o anumită cantitate de aer aflată în burduf, deci fără introducerea de aer suplimentar prin intermediul supapei de nivel, rigiditatea arcului depinde de modificarea presiunii din burduf în urma variației săgeților corespunzătoare diferitelor sarcini preluate de arc.

Rigiditatea arcului pneumatic este influențată și de legea de variație a secțiunii active a burdufului în raport cu variația înălțimii arcului.

Pentru realizarea unor curse de lucru mari se folosesc burdufurile cu mai multe circumvoluțiuni suprapuse.

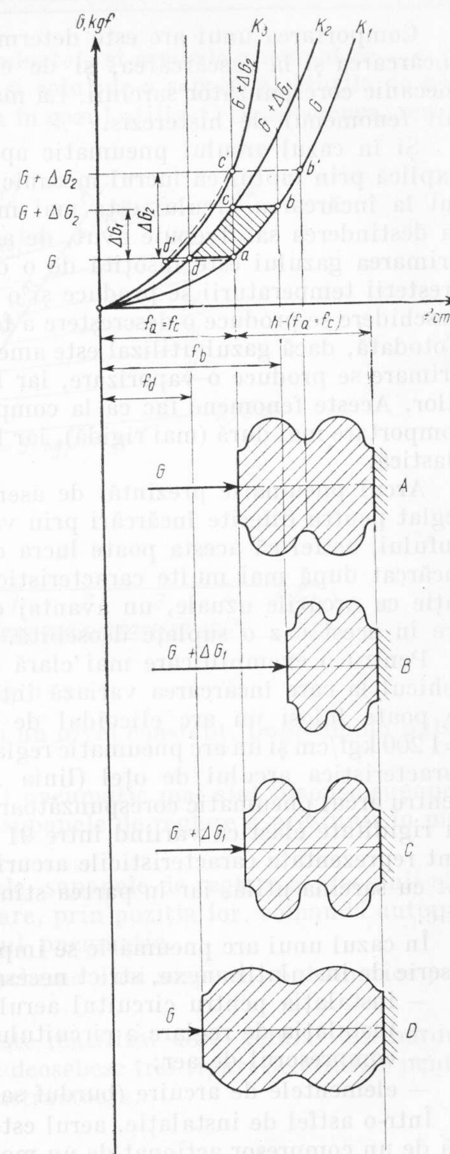



Fig. 14.4

Comportarea unui arc este determinată de curba sa caracteristică la încărcarea şi la descărcarea, şi de capacitatea sa de a acumula lucru mecanic corespunzător sarcinii. La majoritatea tipurilor de arc s-a întîlnit fenomenul de histerezis.

Şi în cazul arcului pneumatic apare acest fenomen. Acest lucru se explică prin faptul că lucrul mecanic acumulat prin comprimarea gazului la încărcarea arcului este mai mare decît lucrul mecanic restituit la destinderea sa. Trebuie avut, de asemenea, în vedere faptul că comprimarea gazului este însoţită de o dezvoltare de căldură, iar datorită creşterii temperaturii se produce şi o creştere a presiunii; în schimb, la deschidere se produce o descreştere a temperaturii şi implicit a presiunii. Totodată, dacă gazul utilizat este amestecat cu vapori saturanţi, la comprimare se produce o vaporizare, iar la destindere o condensare a vaporilor. Aceste fenomene fac ca la comprimare arcul pneumatic să aibă o comportare mai dură (mai rigidă), iar la destindere — o comportare mai elastică.

Arcul pneumatic prezintă, de asemenea, avantajul că poate fi uşor reglat pentru diferite încărcări prin variaţia presiunii în interiorul burdufului, astfel că acesta poate lucra corespunzător sarcinii cu care este încărcat după mai multe caracteristici. Acest lucru prezintă, în comparaţie cu arcurile uzuale, un avantaj deosebit, deoarece arcul pneumatic are în acest caz o supleţe deosebită.

Pentru o exemplificare mai clară se poate compara suspensia la un vehicul la care încărcarea variază între 2 000 şi 4 000 kgf, pentru care se poate folosi un arc elicoidal de oţel cu o rigiditate elastică $c = 1\,200$ kgf/cm şi un arc pneumatic reglabil. În fig. 14.5 se arată comparativ caracteristica arcului de oţel (linia $AB$) şi familia de caracteristici pentru arcul pneumatic corespunzătoare unor presiuni între 2,75 şi 5,3 at, cu rigiditate elastică variind între 91 şi 175 kgf/cm². În partea dreaptă sînt reprezentate caracteristicile arcurilor corespunzătoare arcului încărcat cu sarcina utilă, iar în partea stîngă — alura lor sub greutatea proprie.

În cazul unui arc pneumatic se impune ca sistemul să fie prevăzut cu o serie de instalaţii-anexe, strict necesare funcţionării sale. Acestea sînt:

— instalaţia pentru circuitul aerului;
— instalaţia de reglare a circuitului aerului;
— compresorul de aer;
— elementele de arcuire (burduf sau membrană).

Într-o astfel de instalaţie, aerul este comprimat pînă la limita maximă de un compresor acţionat de un motor şi introdus într-un rezervor de acumulare prin intermediul unei supape de reţinere.



Din rezervor se alimentează conductele şi arcurile pneumatice. Rezervorul are în acelaşi timp şi rolul de a separa picăturile de apă şi vaporii de ulei aflaţi în aerul sau în gazul utilizat. De asemenea, rezer-

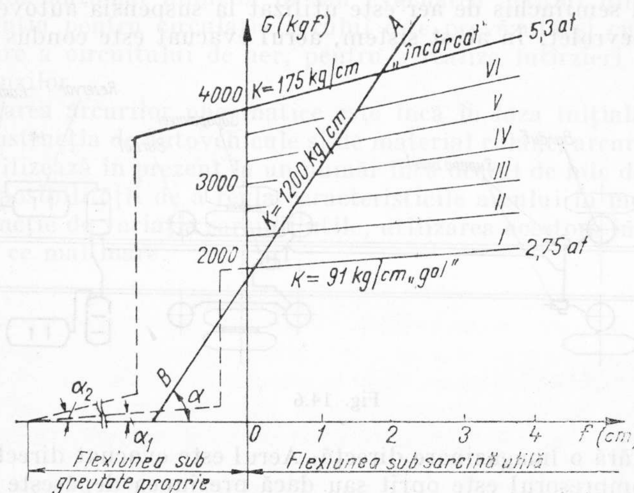



Fig. 14.5

vorul menţine presiunea aerului la un nivel constant, împiedicînd pulsaţiile aerului în arcul pneumatic.

Între rezervorul de aer şi arcul pneumatic mai sînt dispuse supapele de reducere a presiunii aerului şi supapele de reglare a presiunii în mod automat.

În cazul suspensiilor la vehicule, supapele de reglare a presiunii sînt acţionate direct de osiile roţilor care, prin poziţia lor, comandă automat intrarea şi ieşirea aerului în arcul pneumatic.

În fig. 14.6 este reprezentată schema unei suspensii pneumatice pentru un autovehicul.

În funcţie de modul în care este reutilizat aerul refulat din burduf, la micşorarea încărcării arcului se deosebesc trei tipuri de circuite pentru aer, folosite de diferite firme constructoare:

— circuit deschis;
— circuit semiînchis;
— circuit închis.

Circuitul deschis de aer se utilizează la suspensia autovehiculelor de firma Ford. Acest circuit are cea mai simplă reţea de conducte, dar prezintă dezavantajul că solicită mult compresorul şi introduce cantităţi mari de apă condensată şi ulei în burduf.

Circuitul semiînchis de aer este utilizat la suspensia autovehiculelor de firma Chevrolet. În acest sistem, aerul evacuat este condus direct la

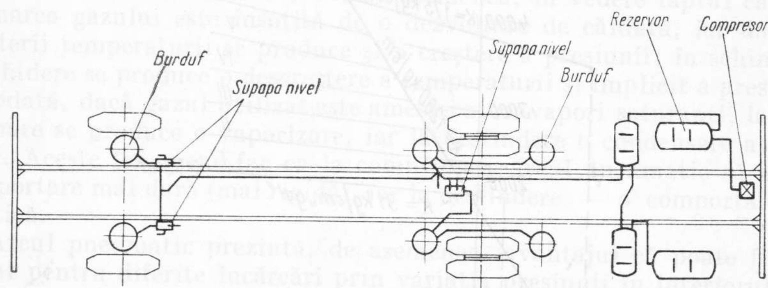



Fig. 14.6

compresor, fără o înmagazinare directă. Aerul este evacuat direct în exterior dacă compresorul este oprit sau dacă presiunea depăşeşte pe acea reglată pentru evacuare.

Circuit închis de aer este utilizat la suspensia autovehiculelor de firma Oldsmobile. Acest sistem este puţin mai complicat, dar prezintă avantajul că, prin completarea mai rară cu aer din atmosferă, murdărirea interioară este foarte mică.

Pentru reglarea circulaţiei aerului se foloseşte o instalaţie specială, în care elementul principal îl constituie supapele de nivel.

În cazul suspensiilor cu arcuri pneumatice, instalaţia pentru reglarea circuitului de aer are de îndeplinit două funcţii opuse:

— în cazul staţionării vehiculului pentru încărcarea sau pentru descărcarea sa, instalaţia de reglat circulaţia aerului comandată de supapa de nivel trebuie să introducă automat aer în arcurile pneumatice — în cazul încărcării, sau să evacueze aerul — în cazul descărcării, astfel ca nivelul cutiei autovehiculului să-şi menţină o poziţie normală de lucru;

— în cazul trecerii vehiculului prin curbe, cînd se produce înclinarea caroseriei, sistemul de reglare trebuie să fie astfel prevăzut, încît să lamineze curentul de aer pentru a se evita la ieşirea din curbă o înclinare nedorită a caroseriei.



Supapa de reglat nivelul se compune de regulă din două ventile cu arc, etanşate cu cauciuc, unul pentru admisie şi celălalt pentru evacuare, comandate printr-o camă, legate printr-o tijă de osiile vehiculului sau de nişte pîrghii solidare cu acestea, astfel că prin poziţia relativă a osiilor se comandă automat admisia în sau evacuarea aerului din burdufuri.

Instalaţia pentru circulaţia aerului este prevăzută şi cu sisteme de strangulare a circuitului de aer, pentru a realiza întîrzieri convenabile ale comenzilor.

Utilizarea arcurilor pneumatice este încă în faza iniţială.

În construcţia de autovehicule şi de material rulant, arcurile pneumatice se utilizează în prezent la un număr încă destul de mic de cazuri, dar datorită posibilităţii de a regla caracteristicile arcului în mod convenabil, în funcţie de variaţia sarcinii utile, utilizarea acestora în viitor va fi din ce în ce mai mare.

15

# Amortizoare

## 15.1. Generalități

În construcția de mașini și aparate, elementele elastice au de foarte multe ori rolul de a proteja organele mașinilor sau construcțiile pe care acestea sînt fixate împotriva vibrațiilor generate de părțile aflate în mișcare ale mașinilor. În acest scop, la diverse mașini sau construcții la care apar vibrații sau șocuri se prevăd și sisteme de protejare sau de înlăturare a lor, denumite în general sisteme de amortizare a vibrațiilor, sau pur și simplu amortizoare.

Studiul vibrațiilor mecanice și al metodelor de amortizare a vibrațiilor constituie o problemă foarte vastă, care depășește cadrul lucrării de față. Totuși, în cele ce urmează se vor lua în considerare, în mod sumar, cîteva sisteme de amortizare tipice, corespunzătoare sistemelor cu un grad sau două de libertate, netinzîndu-se la epuizarea problemei, complexitatea ei necesitînd o dezvoltare specială.

Amortizoarele se pot împărți în trei grupuri oarecum distincte:

— amortizoare mecanice, bazate pe utilizarea unor materiale sau elemente elastice (arcuri);

— amortizoare hidraulice, bazate pe folosirea rezistențelor hidraulice, care iau naștere în cazul unei mișcări relative între masa suspendată elastic și cea nesuspendată;

— amortizoare hidropneumatice, bazate pe folosirea rezistențelor hidraulice și a elasticității pernei de aer comprimat.



Prima categorie este utilizată în industrie la împiedicarea transmiterii vibrațiilor produse de diferite mașini de forță sau de lucru la diversele construcții sau agregate care se află în apropiere. În acest caz, măsurile de izolare a vibrațiilor sînt denumite măsuri de izolare activă sau amortizare activă. Dacă izolarea vibrațiilor produse de una sau de mai multe mașini oarecare, are ca scop apărarea unei mașini de mare precizie sau a anumitor aparate, instrumente de măsură de precizie etc., măsurile de protejare a acestor aparate împotriva vibrațiilor din afară sînt denumite măsuri de izolare pasive sau amortizare pasivă.

În principiu, amortizarea pasivă nu se deosebește de amortizarea activă, iar din această cauză, în cele ce urmează se va prezenta. cu precădere, amortizarea activă.

## 15.2. Elemente de calcul

Pentru a putea analiza modul de funcționare al amortizoarelor este necesară o analiză sumară a vibrațiilor mecanice care se produc în cazul unui corp, asupra căruia se exercită o forță exterioară, denumită în mod curent forță excitatoare, vibrații care poartă în acest caz denumirea de vibrații forțate. Pentru stabilirea noțiunilor de bază este suficient să se ia în considerare cel mai simplu sistem vibrator, cu un grad de libertate (fig. 15.1), format dintr-o masă $m$ suspendată de un arc cu mișcare pe verticală, de constantă elastică $k$. Mișcarea masei este frînată de un mecanism de amortizare, care are un coeficient de amortizare $r$, iar asupra corpului acționează o forță perturbatoare de forma $F_0 \sin \omega t$ produsă de un mecanism motor oarecare.

Ecuația de mișcare a corpului este dată de ecuația diferențială:

$$m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=F_0 \sin\omega t. \qquad (15.1)$$

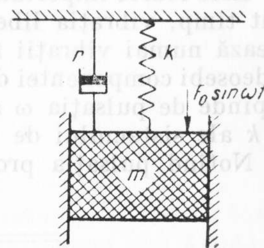


Fig. 15.1

Prin integrarea acestei ecuații diferențiale se ajunge la o soluție formată dintr-o primă parte rezultată din integrarea ecuației diferențiale omogene și o a doua parte care formează o soluție particulară. Ecuația de mișcare are astfel forma:

$$x=e^{-\frac{r}{2m}t} A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A\sin(\omega t-\varphi), \qquad (15.2)$$

unde $A_1$ şi $\varphi_1$ sînt constante de integrare şi depind de condiţiile iniţiale, iar amplitudinea $A$ şi unghiul de defazaj $\varphi$ sînt date de relaţiile (15.2,a) şi (15.2,b):

$$A=\frac{F_0}{\sqrt{(r\omega)^2+(k-m\omega^2)^2}};\qquad(15.2,a)$$

$$\varphi=\text{arc tg}\frac{r\omega}{k-m\omega^2}.\qquad(15.2,b)$$

În acelaşi timp, pseudopulsaţia $\omega_1$ este dată de relaţia:

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{r^2}{4m^2}}.\qquad(15.2,c)$$

Analizînd ecuaţia de mişcare (15.2) se poate observa că mişcarea corpului poate fi considerată, în cazul general, drept rezultate a două mişcări vibratorii şi anume:

— o primă mişcare vibratorie liberă, amortizată, de formă exponenţială (fig. 15.2, *a*), dată de ecuaţia:

$$x_1=e^{-\frac{r}{2m}t}\cos(\omega_1 t+\varphi_1);\qquad(15.3)$$

— o a doua mişcare forţată, de formă sinusoidală (fig. 15.2, *b*):

$$x_2=A\sin(\omega t+\varphi).\qquad(15.3,a)$$

Prin suprapunerea celor două mişcări se obţine mişcarea rezultantă (fig. 15.2, *c*).

Este foarte important de remarcat faptul că după trecerea unui anumit timp, vibraţia liberă devine neglijabilă, dispare, iar corpul efectuează numai vibraţii forţate. Aceasta face ca atenţia să fie acordată îndeosebi componentei datorită vibraţiilor forţate, a cărei amplitudine $A$ depinde de pulsaţia $\omega$ a forţei excitatoare şi de mărimile mecanice $m$ şi $k$ ale sistemului de vibraţie.

Notînd pulsaţia proprie a sistemului cu

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}},$$

se poate pune în evidenţă $\omega_0$ în expresia (15.2,a):

$$A=\frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left(\frac{r}{k}\,\omega\right)^2}}\qquad(15.4)$$



Notînd săgeata statică cu $x_{st}=\frac{F_0}{k}$;

— amortizarea critică cu $r_{cr}=2m\omega_0=2m\sqrt{\frac{k}{m}}=2\sqrt{mk}$;

amortizarea relativă $\beta=\frac{r}{r_{cr}}$,

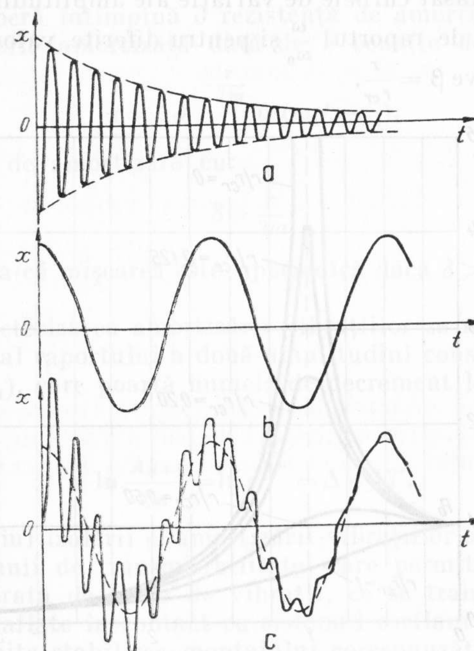



Fig. 15.2

relaţia amplitudinii (15.4) devine:

$$A=\frac{x_{st}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left(2\,\frac{r}{r_{cr}}\,\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}.\qquad(15.5)$$

Se poate observa că amplitudinea vibraţiilor devine maximă pentru cazul $\frac{\omega}{\omega_0}=1$ şi în acest caz are valoarea:

$$A=\frac{F_0}{r\omega}.\qquad(15.6)$$

Pentru această valoare are loc fenomenul de rezonanţă. Dacă vibraţia forţată are loc fără amortizare, adică $r=0$, amplitudinea devine infinită. Se constată că pentru diverse valori ale amortizării relative $\beta=\frac{r}{r_{cr}}$ şi în funcţie de raportul $\frac{\omega}{\omega_0}$, valoarea amplitudinii vibraţiilor variază. În fig. 15.3 s-au trasat curbele de variaţie ale amplitudinilor vibraţiilor forţate în funcţie de raportul $\frac{\omega}{\omega_0}$ şi pentru diferite valori constante ale amortizării relative $\beta=\frac{r}{r_{cr}}$.

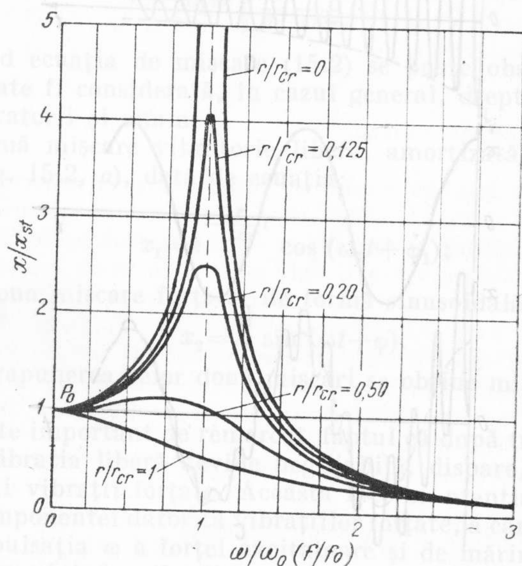


Fig. 15.3

Dacă asupra sistemului nu se exercită o forţă perturbatoare ($F_0=0$) şi nu există nici amortizare ($r=0$), ecuaţia mişcării capătă forma mişcării armonice:

$$x=A\cos(\omega_0 t-\varphi). \tag{15.7}$$

Intervalul de timp $T$ dintre două amplitudini succesive ale deplasării se numeşte perioada mişcării şi se măsoară în secunde:

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{15.8}$$



Numărul de perioade pe secundă este frecvenţa vibraţiei şi se măsoară în herţi:

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}. \tag{15.9}$$

Dacă asupra sistemului nu se exercită o forţă perturbatoare ($F_0=0$), dar vibraţia liberă întîmpină o rezistenţă de amortizare, ea devine o mişcare vibratorie amortizată dată de o ecuaţie de forma:

$$x=A_1 e^{-\frac{r}{2m}t}\cos(\omega_1 t-\varphi_1). \tag{15.10}$$

Notînd gradul de amortizare cu:

$$\delta=\frac{r}{2m}, \tag{15.11}$$

se poate observa că mişcarea este aperiodică dacă $\delta>\omega_0$, sau periodică dacă $\delta<\omega_0$.

Pentru caracterizarea amortizării vibraţiilor se mai foloseşte logaritmul natural al raportului a două amplitudini consecutive de acelaşi sens ($A_n+A_{n+1}$), care poartă numele de decrement logaritmic:

$$\ln\frac{A_{n+1}}{A_n}=\ln e^{\frac{\pi r}{m\omega}}=\Delta=\delta T. \tag{15.12}$$

Pentru studiul izolării şi amortizării vibraţiilor se dă o importanţă deosebită noţiunii de transmisibilitate, care permite evaluarea forţei dinamice, generată de sursa de vibraţii, ce se transmite elementelor înconjurătoare aflate în contact cu sistemul oscilant. Analiza transmisibilităţii permite stabilirea montajului corespunzător pentru a transmite la sistemul înconjurător o forţă dinamică minimă.

Considerînd amortizarea primului termen relaţia (15.2), integrala generală a ecuaţiei (15.1) se poate scrie sub forma:

$$x=A\sin(\omega t-\varphi). \tag{15.13}$$

Ecuaţiile vitezei şi acceleraţiei sînt următoarele:

$$\dot{x}=A\omega\cos(\omega t-\varphi); \tag{15.14}$$

$$\ddot{x}=-A\omega^2\sin(\omega t-\varphi)=-\omega^2 x. \tag{15.15}$$

Se poate observa că viteza este defazată cu $\frac{\pi}{2}$ faţă de deplasare, iar acceleraţia este în opoziţie faţă de ea. Pentru momentul în care

forța perturbatoare are valoare maximă $F_0$, ecuația diferențială a mișcării devine:

$$m\ddot{x}_0+r\dot{x}_0+kx_0=F_0, \qquad (15.16)$$

unde $x_0$, $\dot{x}_0$, $\ddot{x}_0$ reprezintă valorile deplasării, vitezei și accelerației la momentul respectiv.

Ținînd seamă de ecuațiile deplasării, vitezei și accelerației, se poate observa că între $x_0$, $\dot{x}_0$ și $\ddot{x}_0$ defazat cu $\frac{\pi}{2}$ există relațiile:

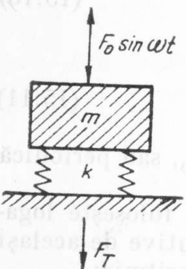


Fig. 15.4

$$x_0=\frac{\dot{x}_0}{\omega};\ \ddot{x}_0=-\omega\dot{x}_0=-\omega^2x_0. \qquad (15.17)$$

Știind că defazarea vitezei față de deplasare este $\frac{\pi}{2}$, rezultă forța maximă care acționează asupra sistemului:

$$|F_0|=x_0\sqrt{\left(m\omega-\frac{k}{\omega}\right)^2+r^2}. \qquad (15.18)$$

Asupra fundației (fig. 15.4) care susține sistemul elastic acționează numai o parte din forța maximă $F_0$ aplicată sistemului și anume forța transmisă $F_T$, care se determină cu relația:

$$F_T=kx_0+r\dot{x}_0 \qquad (15.19)$$

sau

$$F_T=\frac{k}{\omega}\dot{x}_0+r\dot{x}_0. \qquad (15.20)$$

Modulul forței transmise, ținînd seamă de defazajul dintre viteză și deplasare,

$$|F_T|=\frac{\dot{x}_0}{\omega}\sqrt{k^2+r^2\omega^2}.$$

Transmisibilitatea vibrațiilor în cazul unui sistem elastic se măsoară cu coeficientul de transmisibilitate, definit de raportul:

$$C_T=\frac{F_T}{F_0}=\frac{\frac{\dot{x}_0}{\omega}\sqrt{k^2+r^2\omega^2}}{\dot{x}_0\sqrt{\left(m\omega-\frac{k}{\omega}\right)^2+r^2}}. \qquad (15.21)$$



Coeficientul de transmisibilitate se exprimă de regulă în funcție de următorii parametri:

— frecvența relativă, $\gamma$, reprezentînd raportul dintre frecvența forței perturbatorii și frecvența proprie a agregatului;

$$\gamma=\frac{\omega}{\omega_0}=\frac{\nu}{\nu_0}; \qquad (15.22)$$

— coeficientul de amortizare relativ $\beta$, definit anterior.

Folosind acești parametri, coeficientul de transmisibilitate

$$C_T=\sqrt{\frac{1+\left(2\frac{r}{r_{cr}}\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2\right]^2+\left(2\frac{r}{r_{cr}}\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2}}=\frac{\sqrt{1+4\beta^2\gamma^2}}{\sqrt{(1-\gamma)^2+4\beta^2\gamma^2}}. \qquad (15.23)$$

Valoarea coeficientului de transmisibilitate este o funcție de parametrii $\beta$ și $\gamma$. Dacă se dau coeficientului relativ de amortizare $\beta$ diferite valori constante, se pot obține diverse curbe de variație ale coeficientului de transmisibilitate, în funcție de frecvența relativă $\gamma$, adică:

$$C_T=f(\gamma). \qquad (15.24)$$

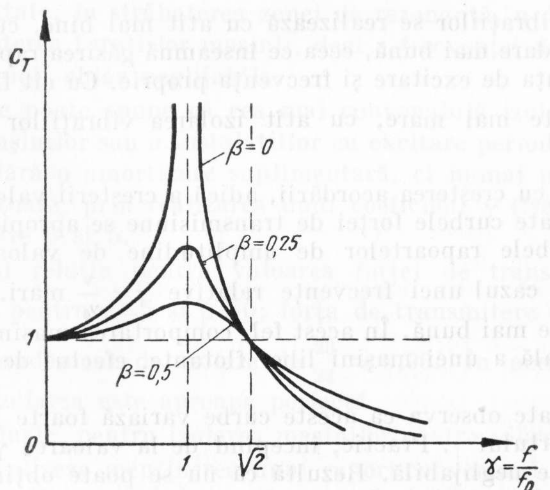


Fig. 15.5

În fig. 15.5 se dau familiile de curbe $C_T=f(\gamma)$ pentru diferite valori ale lui $\beta$.

Analizînd diagramele date in fig. 15.3 şi 15.5, în care se arată variaţia raportului amplitudinilor oscilaţiilor şi raportul forţelor în funcţie de frecvenţa relativă, se pot trage o serie de concluzii foarte importante pentru realizarea unei înlăturări active a deranjamentelor produse de sisteme (maşini) cu excitaţie periodică. Rezultă din analiza acestor curbe următoarele proprietăţi ale izolării vibraţiilor:

a) În jurul valorii $\gamma=\frac{\nu}{\nu_0}=1$, adică atunci cînd frecvenţa proprie a maşinii izolate corespunde aproximativ cu frecvenţa de excitaţie, forţa de deranjare este deosebit de mare şi la o amortizare redusă amplitudinile de oscilaţie au valori mari. Această situaţie, denumită rezonanţă, nu permite o exploatare normală a sistemului.

b) Intervalul dintre $\gamma=0$ şi $\gamma=1$ corespunde unei fundaţii fixe. Din diagrame rezultă că în acest caz, amplitudinea oscilaţiei maşinii este într-adevăr mică, iar forţele transmise sînt mai mari decît forţele de excitare. În acest fel, la o montare fixă mişcările sistemului de susţinere (batiu, fundaţie etc.) devin şi ele mari.

c) Forţa transmisă este mai mică decît forţa de excitare, dacă $\gamma=\frac{\nu}{\nu_0}>1{,}41$.

Izolarea vibraţiilor se realizează cu atît mai bine, cu cît se poate realiza o acordare mai bună, ceea ce înseamnă găsirea raportului optim dintre frecvenţa de excitare şi frecvenţa proprie. Cu cît frecvenţa relativă $\gamma=\frac{\nu}{\nu_0}$ este mai mare, cu atît izolarea vibraţiilor se realizează mai bine.

d) O dată cu creşterea acordării, adică a creşterii valorii frecvenţei relative $\gamma$, toate curbele forţei de transmisiune se apropie de valoarea zero, iar curbele rapoartelor de amplitudine de valoarea minimă. Rezultă că în cazul unei frecvenţe relative $\gamma=\frac{\nu}{\nu_0}$ mari, amortizarea sistemului este mai bună. În acest fel, comportarea maşinii se apropie de starea ideală a unei maşini liber flotante, efectul de izolare fiind mai bun.

Se mai poate observa că aceste curbe variază foarte lin o dată cu creşterea raportului $\gamma$. Practic, începînd de la valoarea $\gamma=5$, variaţia raportului este neglijabilă. Rezultă că nu se poate obţine o îmbunătăţire a randamentului de izolare dacă se măreşte mai mult valoarea lui $\gamma$ peste această limită, acest lucru fiind important şi pentru faptul că preţul de cost creşte cu creşterea lui $\gamma$, şi din această cauză sistemele se dispun astfel ca să se realizeze pentru $\gamma$ o valoare cuprinsă între 3 şi 5.



e) Pentru valori ale frecvenţei relative $\gamma>1{,}41$, singurul element care se ia în considerare pentru o izolare bună, forţa transmisă este cu atît mai mică cu cît se reduce valoarea coeficientului relativ de amortizare $\beta=\frac{r}{r_{cr}}$. În acelaşi timp, amplitudinea oscilaţiei nu este influenţată de către amortizare. Rezultă că în această regiune amortizarea are o influenţă dezavantajoasă asupra efectului de izolare.

f) Amplitudinile oscilaţiilor se reduc printr-o amortizare puternică numai în zona rezonanţei.

Avînd în vedere faptul că majoritatea maşinilor sînt acordate supracritic, rezultă că atît la pornire, cît şi la oprire ele trebuie să treacă prin zona de rezonanţă, ceea ce ar crea impresia că nu se poate evita o amortizare puternică pentru o bună funcţionare a sistemului din punctul de vedere al izolării vibraţiilor. Deoarece valorile pentru raportul amplitudinii date în diagrame sînt valabile numai pentru frecvenţe constante în timp, fenomenul de rezonanţă nu se produce decît dacă se păstrează un timp mai lung frecvenţa (turaţia) de excitaţie constantă.

În realitate, în străbaterea zonei de rezonanţă, o dată cu creşterea sau descreşterea turaţiilor maşinii, deci a frecvenţei de excitaţie, efectele sînt mici, chiar neglijabile.

Deci, se poate spune că cea mai convenabilă izolare a vibraţiilor în cazul maşinilor sau a instalaţiilor cu excitare periodică se realizează de regulă fără o amortizare suplimentară, ci numai printr-o acordare corespunzătoare, prin realizarea unui coeficient $\gamma$ (frecvenţa relativă) cuprins între 3 şi 5.

Folosind relaţia pentru valoarea forţei de transmitere se poate constata că pentru $\gamma=5$ şi $\beta=0$; forţa de transmitere devine: $F_T=\frac{F_0}{24}$, adică un randament de izolare de $\frac{23}{24}\approx 0{,}96$. În acest caz se poate spune că izolarea este aproape perfectă.

În concluzie, pentru izolarea maşinilor contra vibraţiilor este necesar să se realizeze menţinerea unui raport convenabil, $\nu>\sqrt{2}\,f_0$, între frecvenţe excitatoare şi frecvenţa proprie a sistemului. De cele mai multe ori, determinarea frecvenţei proprii este dificilă. Totuşi, acest lucru se poate realiza în multe cazuri prin măsurarea deformaţiilor statice ale sistemului (agregatului), Astfel, între greutatea $P$ a agre-

gatului împreună cu stratul izolator, constanta elastică a stratului izolator elastic $k$ şi deformaţia statică $x_{st}$ se stabileşte relaţia:

$$P=kx_{st} \quad \text{sau} \quad x_{st}=\frac{P}{k}. \qquad (15.25)$$

Frecvenţa proprie a agregatului:

$$\nu_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{\sqrt{g}}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{P}}\approx\frac{5}{\sqrt{x_{st}}}. \qquad (15.26)$$

n acelaşi timp, frecvenţa perturbatoare este dată de relaţia:

$$\nu=\frac{n}{60}, \qquad (15.27)$$

unde $n$ este turaţia maşinii, în rot/min.

Ţinînd seamă de faptul că coeficientul de transmisibilitate, pentru valori mici ale amortizării relative $\beta=\frac{r}{r_{cr}}\approx 0$, este maxim şi are valoarea:

$$|C_T|\approx\frac{1}{\gamma^2-1}, \qquad (15.28)$$

e poate determina relaţia:

$$x_{st}=\frac{25}{\nu^2}\left(1+\frac{1}{C_T}\right)=\frac{9\times 10^4}{n^2}\left(1+\frac{1}{C_T}\right). \qquad (15.29)$$

Pentru calculul rapid al izolaţiei contra vibraţiilor se folosesc curent nomograme care se bazează pe relaţiile amintite şi pe proprietăţile materialelor cel mai des folosite pentru izolarea vibraţiilor ca: plută, cauciuc şi arcuri metalice. În nomograma din fig. 15.6 se dau în abscisă deformaţiile statice, iar în ordonată valorile pentru frecvenţă, greutatea agregatului sau turaţia maşinii. În nomogramă apar familii de drepte caracteristice. Dreapta punctată înclinată reprezintă dreapta de rezonanţă, necesară pentru determinarea frecvenţei proprii în raport cu deformaţia statică. Dreptele continue paralele cu dreapta de rezonanţă reprezintă curbele de egală transmisibilitate (pentru valori cuprinse între 0,01 şi 0,5). Dreptele paralele cu bisectoarea întîi a axelor de coordonate sînt drepte de egală constantă elastică.

Folosirea nomogramei este foarte simplă. Se cere să se calculeze, de exemplu, frecvenţa unui agregat care produce o săgeată statică de 1 cm. Se duce o verticală prin punctul de abscisă 1 cm pînă intersec-



tează dreapta de rezonanţă, iar din punctul de intersecţie o orizontală. Se citeşte pe scara din stînga frecvenţa proprie 5 Hz.

Pentru calculul deformaţiei statice şi frecvenţei proprii a unui agregat de greutate 800 kgf, aşezat pe patru arcuri identice, avînd fiecare o constantă elastică $k=500$ kgf/cm, se procedează astfel: se duce pe dia-

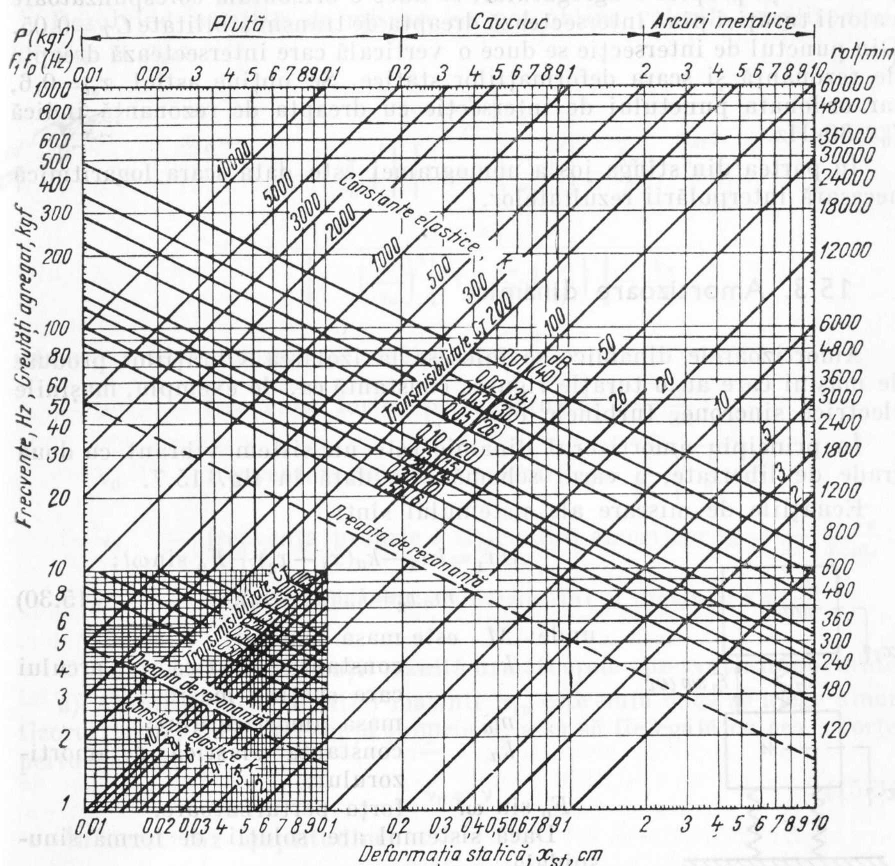



Fig. 15.6

gramă o dreaptă orizontală prin punctul de ordonată 200, corespunzătoare sarcinii preluate de fiecare arc, pînă intersectează dreapta $k=500$.

Ducînd prin acest punct o verticală, se găseşte pe abscisă deformaţia statică $x_{st}=0,4$ cm. Ordonata punctului de intersecţie cu dreapta de rezonanţă de valoarea frecvenţei proprii, $f_0=8$ Hz.

În cazul cînd se dă turaţia agregatului, de exemplu $n=1\,800$, şi coeficientul de transmisibilitate $C_T=0,05$ şi se cere săgeata statică şi frecvenţa proprie a agregatului, se duce o orizontală corespunzătoare valorii turaţiei pînă intersectează dreapta de transmisibilitate $C_T=0,05$. Din punctul de intersecţie se duce o verticală care intersectează dreapta de rezonanţă şi scara deformaţiilor statice. Se obţine astfel $x_{st}=0,6$, iar ordonata punctului de intersecţie cu dreapta de rezonanţă indică $f_0=30$ Hz.

În partea din stînga jos a nomogramei este dată scara logaritmică necesară interpolării rezultatelor.

## 15.3. Amortizoare dinamice

Amortizoarele dinamice se folosesc la izolarea vibraţiilor produse de maşini care au o turaţie riguros constantă ca, de exemplu, maşinile electrice sincrone, turbinele etc.

În principiu amortizorul dinamic este un sistem vibrant cu două grade de libertate, a cărui schemă este dată în fig. 15.7.

Ecuaţiile de mişcare ale sistemului sînt:

$$M\ddot{x}_1=kx_1-k_a(x_1-x_2)+F_0\sin\omega t;$$
$$m_a\ddot{x}_2=k_a(x_1-x_2), \qquad (15.30)$$

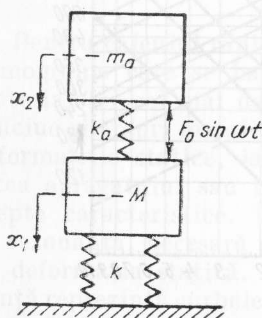


Fig. 15.7

unde: $M$ este masa maşinii;
$k$ — constanta elastică a arcului care susţine maşina;
$m_a$ — masa amortizorului;
$k_a$ — constanta elastică a amortizorului;
$F_0 \sin \omega t$ — forţa perturbatoare.

Dacă sistemul are soluţii de formă sinusoidală,

$$x_1=x_{10}\cdot\sin\omega t;$$
$$x_2=x_{20}\cdot\sin\omega t, \qquad (15.31)$$

unde: $x_{10}$ şi $x_{20}$ sînt amplitudinile oscilaţiilor maşinii şi amortizorului dinamic, pentru momentul în care forţa perturbatoare are valoarea maximă sistemul devine:



$$(k+k_a-M\omega^2)x_{10}-k_a x_2=F_0 \qquad (15.32)$$
$$-k_a x_{10}+(k_a-m_a\omega^2)x_{20}=0$$

Rezolvînd ecuaţiile de mişcare se pot obţine valorile amplitudinilor $x_{10}$ şi $x_{20}$:

$$x_{10}=\frac{1-\left(\frac{\nu}{\nu a}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{\nu}{\nu_a}\right)^2\right]\left[1+\alpha-\left(\frac{\nu}{\nu_a}\right)^2\right]-\frac{k_a}{k}}\,x_{st}; \qquad (15.33)$$

$$x_{20}=\frac{x_{st}}{\left[1-\left(\frac{\nu}{\nu_a}\right)^2\right]\left[1+\frac{k_a}{k}\left(\frac{\nu}{\nu_a}\right)^2\right]-\frac{k_a}{k}},$$

unde: $x_{st}$ este deformaţia statică $x_{st}=\frac{F_0}{k}$;
$\nu$ — frecvenţa forţei perturbatoare; $\nu=\frac{\omega}{2\pi}$;
$\nu_0$ — frecvenţa proprie a maşinii $\nu_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}$;
$\nu_a$ — frecvenţa proprie a sistemului amortizor $\nu_a=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_a}{m_a}}$;
$\alpha$ — raportul maselor amortizorului şi maşinii; $\alpha=\frac{m_a}{M}$.

Din analiza acestor relaţii rezultă următoarele observaţii importante.

a) Amplitudinea vibraţiei maşinii $x_{10}$ este nulă dacă se alege amortizorul, astfel încît frecvenţa proprie $\nu_0$ a sa să fie egală cu cea a forţei perturbatoare

$$\nu_a=\nu. \qquad (15.34)$$

În acest caz amplitudinea

$$x_{20}=-\frac{k}{k_a}\cdot x_{st}=\frac{F_0}{k_1}. \qquad (15.35)$$

În concluzie, dacă maşina rămîne nemişcată, forţa născută de amortizor este egală şi opusă forţei exterioare.

b) Fenomenul de rezonanţă apare cînd $\nu_a = \nu_0$, adică atunci cînd este îndeplinită condiţia:

$$\frac{k_a}{k} = \frac{m_a}{M} = \alpha. \tag{15.36}$$

În acest caz, valorile frecvenţei forţei perturbatoare, pentru care se anulează numitorul amplitudinilor maxime (15.33), se pot obţine din relaţia:

$$\left(\frac{\nu}{\nu_a}\right)^2 = 1 + \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\alpha + \frac{\alpha^2}{4}}. \tag{15.37}$$

Rezultă că pentru un raport dat al maselor amortizorului şi al maşinii există două valori ale frecvenţei excitatoare, pentru care elongaţiile $x_1$ şi $x_2$ devin infinite, aceste frecvenţe purtînd numele de frecvenţe proprii ale sistemului şi au valori destul de apropiate de valoarea frecvenţei $\nu = \nu_a$, pentru care se construieşte amortizorul dinamic.

Amortizorul dinamic, realizat pe baza schemei indicate, pentru izolarea vibraţiilor unei maşini asupra căreia acţionează o forţă $F_0 \sin \omega t$, realizează o amortizare foarte bună dacă maşina are o turaţie constantă. Amortizorul dinamic nu are eficacitate, ci este chiar contraindicat dacă turaţia este variabilă, deoarece în acest caz sistemul are două zone de rezonanţă.

## 15.4. Amortizoare hidraulice şi hidropneumatice

Aceste amortizoare sînt folosite la izolarea vibraţiilor cu precădere în construcţia suspensiei elastice a autovehiculelor şi a avioanelor. În construcţia modernă a autovehiculelor, suspensia lor elastică trebuie să corespundă unor cerinţe din ce în ce mai riguroase, astfel încît să ferească pasagerii şi încărcătura de acceleraţii verticale mari şi de şocuri, chiar în condiţii grele de exploatare. În acest scop s-a ajuns la necesitatea utilizării unor elemente cu coeficienţi reduşi de amortizare şi cu o amortizare proprie mică. Realizarea acestor cerinţe duce astăzi la utilizarea tot mai răspîndită a amortizoarelor hidraulice sau hidropneumatice. Amortizorul de vibraţii folosit de autovehicule are de îndeplinit două sarcini importante.

a) Amortizarea rapidă şi reducerea la o valoare convenabilă a vibraţiilor caroseriei suspendate pe arcuri, produse de către neregularitatea terenului şi de forţele masice.



b) Anularea vibraţiilor produse de elementele componente ale autovehiculului care formează grupul de mase neamortizate (roţile, osiile, butucii, frînele etc.). Această anulare a vibraţiilor trebuie să fie astfel realizată, încît să nu se întrerupă legătura de forţe între teren şi roţile pneumatice în vederea asigurării direcţiei şi dirijării vehiculului.

În cazul autovehiculelor şi avioanelor, şocurile produse în timpul mişcării datorită denivelărilor terenului sînt preluate de către cauciucurile roţilor.

Esenţa amortizării constă în deformarea sistemului de amortizare format din cauciucurile roţilor şi din amortizoarele propriu-zise.

Amortizarea trebuie să fie elastică cu intensitate crescîndă a absorbirii şocului, astfel ca efortul maxim să apară la sfirşitul cursei amortizorului, să nu permită reculuri bruşte în timpul cursei de revenire şi să nu permită desprinderea de pe pămînt.

### 15.4.1. Amortizor hidraulic

Modelul cel mai răspîndit de amortizor hidraulic este cel de tip telescopic.

Funcţionarea amortizorului hidraulic se bazează pe rezistenţele hidraulice care apar în timpul mişcării relative între masa suspendată elastic şi cea nesuspendată.

În cazul autovehiculelor, amortizorul, arcurile de suspensie, cauciucurile roţilor şi autovehiculul formează un sistem oscilant cu două grade de libertate, a cărui schemă este reprezentată în fig. 15.8 şi care are două frecvenţe proprii. Valorile acestor frecvenţe sînt date de relaţiile:

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \cdot \frac{1}{M_1}}; \qquad \nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{(k_1 + k_2)\frac{1}{M_2}} \tag{15.38}$$

unde: $k_1$ este coeficientul elastic al arcului de suspensie;

$k_2$ — coeficientul elastic al cauciucurilor roţilor.

Trebuie avut în vedere că elasticitatea pneului este mult mai mare decît a arcului de suspensie şi că în acelaşi timp masa $M_1$ a caroseriei este mult mai mare decît masa nesuspendată $M_2$ ce corespunde roţilor, axelor etc. $M_1 \gg M_2$.

Conform acestor relații, cele două frecvențe $\nu_1$ și $\nu_2$ au valori foarte iferite; pentru autoturisme, de exemplu, raportul dintre cele două recvențe are valori cuprinse între 5 și 10:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1}=5\ldots10.$$

Amortizorul are deci două zone de rezonanță periculoase, iar pentru bună funcționare a sistemului este necesar ca frecvențele de excitație

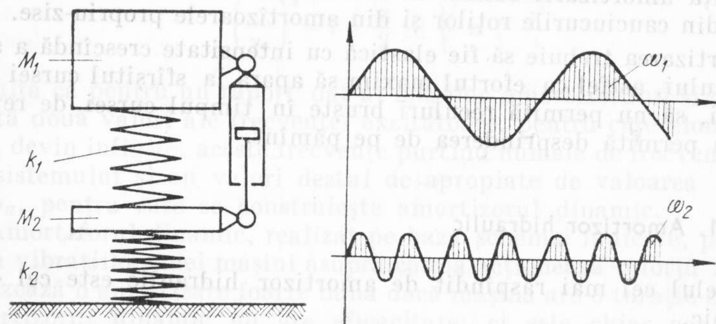



Fig. 15.8

fie cît mai diferite de frecvențele proprii, pentru ca amortizarea fie cît mai eficace.

În fig. 15.9 este reprezentată schema unui amortizor hidraulic, pe za căreia se poate determina prin calcul valoarea forței de amorti re $P$, care este mereu dirijată în sens contrar mișcării relative a gărelor de fixare ale amortizorului.

Considerînd că în mișcarea lichidului nu se produc deranjamente, torită degajărilor de gaze sau vapori, în timpul funcționării amor- zorului, în baza condiției de continuitate, se poate scrie relația:

$$(A_1-A_2)v=\mu A_3\sqrt{2(p_2-p_1)\frac{1}{\rho}}, \qquad (15.39)$$

care: $A_1$ este secțiunea pistonului, în m²;
$A_2$ — secțiunea tijei pistonului, în m²;
$A_3$ — secțiunea ventilului, în m²;
$v$ — viteza relativă a pistonului, în m/s;
$\rho$ — densitatea masică, în $\frac{\text{kgf}\cdot\text{s}^2}{\text{m}^4}$; $\rho=\frac{\gamma}{g}$;



$\mu$ este coeficientul de scurgere (valoare medie eficace) $p_1$ și $p_2$ sînt presiunile pe cele două fețe ale pistonului.

În timpul mișcării ascendente a pistonului, echilibrul forțelor care lucrează asupra sa este dat de relația:

$$A_1p_1+P-(A_1-A_2)p_2=0, \qquad (15.40)$$

de unde rezultă:

$$p_2=\frac{A_1p_1+P}{A_1-A_2}, \qquad (15.41)$$

care, introdusă în relația (15.39), permite determinarea forței de amortizare $p$, transmisă de amortizor, în funcție de viteza sa:

$$p=\frac{(A_1-A_2)^3v^2}{\mu^2A_3^2\frac{2g}{\gamma}}-p_1A_2. \qquad (15.42)$$

Secțiunea $A_3$ compusă din secțiunea de trecere a canalelor de descărcare a ventilelor și din interstițiul inelar dintre piston și cilindru poate fi constantă sau poate fi variabilă dependentă de diferența presiunilor $p_2-p_1$, dată de expresia

$$A_3=C(p_2-p_1)^x \quad \text{sau} \quad p_2-p_1=\left(\frac{A_3}{C}\right)^{\frac{1}{x}}, \qquad (15.43)$$

unde $C$ este o constantă a amortizorului. Valoarea coeficientului $x$ depinde de construcția ventilului de trecere a fluidului. Astfel:

$x=0$; $A_3=C$, în cazul unei secțiuni de gîtuire constante;

$x=1$; $A_3=C(p_2-p_1)$, în cazul unei secțiuni de gîtuire variabile, reglată de un ventil comandat de un arc.

Din relațiile (15.39) și (15.43) se obțin relațiile:

$$A_3=Bv^{\frac{4x}{1+2x}}; \qquad p=\frac{Qv^2}{A_3^2}-p_1A_2 \qquad (15.44)$$

unde $B$ și $Q$ sînt constante.

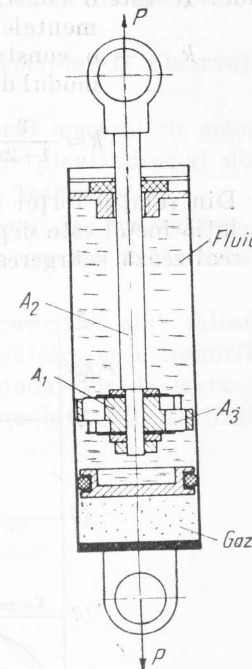



Fig. 15.9

În final, pentru forța transmisă de amortizor se obține o relație de forma:

$$P = Rv^{\frac{2}{1+2x}} - p_1 A_2 \approx Rv^k, \qquad (15.45)$$

unde: $R$ este o constantă care rezultă din calcul și depinde de elementele constructive;

$k$ — o constantă care depinde de valoarea lui $x$, adică de modul de reglare a gîtuirii scurgerii lichidului;

$$k = \frac{2}{1+2x}.$$

Din relația forței transmise de amortizorul hidraulic se deduce că variația forței este dependentă de viteza pistonului și de modul în care se realizează scurgerea lichidului prin ventil.

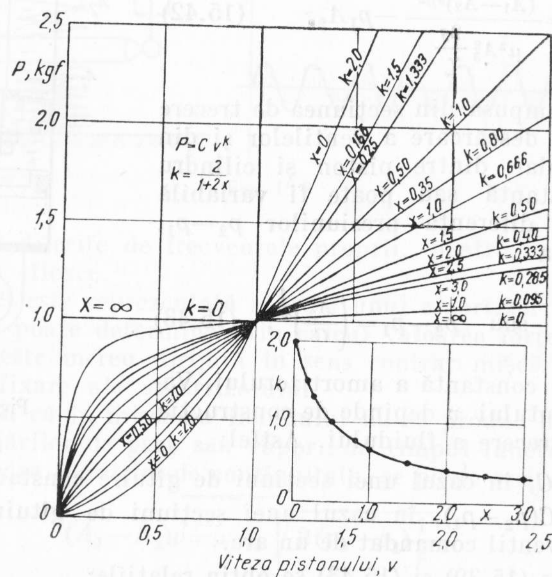



Fig. 15.10

În fig. 15.10 se dă reprezentarea grafică a variației forței de amortizare $P$ în funcție de viteza $v$, pentru diferite valori ale exponenților $x$, respectiv $k$.



În timpul funcționării sale ca izolator de vibrații, amortizorul hidraulic absoarbe lucrul mecanic. Mărimea lucrului mecanic absorbit la fiecare cursă a pistonului rezultă din suprafața diagramei care reprezintă forța transmisă de piston în funcție de cursa acestuia.

În fig. 15.11 sînt reprezentate diagramele pentru diverse valori ale exponentului $k$.

Din analiza acestor diagrame se pot face următoarele observații importante:

o valoare redusă a exponentului $k$ face ca lucrul mecanic de amortizare să crească la fiecare cursă, deoarece gradul de plenitudine al diagramei crește pentru o valoare maximă a forței transmise $P$;

pentru o valoare mică a exponentului $k$, forța de transmitere a amortizorului variază foarte puțin în cazul unor variații de frecvențe sau amplitudini.

Deoarece amortizoarele hidraulice și hidropneumatice sînt folosite aproape cu exclusivitate în construcția autovehiculelor și a trenurilor de aterizare a avioanelor, este bine a analiza modul lor de lucru în condițiile utilizării lor. Amortizarea vibrațiilor șasiului este realizată,

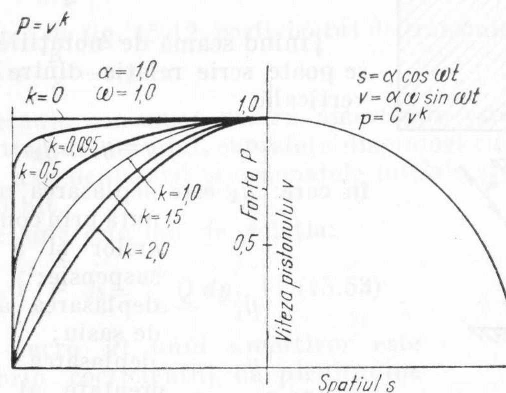



Fig. 15.11

în cazul autovehiculelor sau al trenurilor de aterizare a avioanelor, de către mai multe elemente, și anume: cauciucurile roților, amortizorul (hidraulic sau hidropneumatic) propriu-zis și arcurile de susținere.

În fig. 15.12* este reprezentat schematic un sistem de amortizare utilizat la trenurile de aterizare, care în principiu este asemănător cu cel al autovehiculelor.

Lucrul mecanic absorbit de sistemul de amortizare

$$L=\frac{1}{2}\,m_{red}\,v_y^2, \qquad (15.46)$$

unde: $v_y$ este viteza verticală de deplasare a masei reduse;
$m_{red}$ — masa redusă a vehiculului, adică masa sa raportată la liniile de acționare a rezultantei șocurilor.

Pentru masa redusă se ține seamă nu numai de mișcarea de înaintare a vehiculului, ci și de rotirea lui în raport cu centrul său de greutate.

Amortizoarele trebuie să fie astfel amplasate, încît unghiul să fie, în toate cazurile normale posibile de șoc, pe cît posibil cît mai mic. Valoarea acestui unghi se ia constructiv și în funcție de modul de așezare al amortizorului. În cazul jambei de amortizare telescopice, valoarea unghiului $\varphi$ se ia mai mică de 25°, iar în cazul jambelor cu pîrghie se iau pentru $\varphi$ valori între 30° și 40°. Raportul între forțele $P$ și $Q$ este tocmai coeficientul de transmitere al forțelor

$$C_T=\frac{P}{Q}. \qquad (15.47)$$

*Direcția de deplasare*

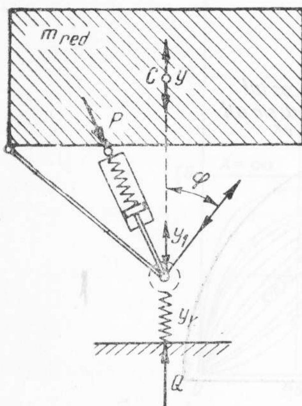



Fig. 15.12

Ținînd seamă de notațiile din fig. 15.12 se poate scrie relația dintre deplasările pe verticală:

$$y=y_k+y_1,$$

în care: $y_k$ este deplasarea axei roții obținută prin comprimarea pneurilor și a arcurilor de suspensie;
$y_1$ — deplasarea axei roții față de șasiu;
$y$ — deplasarea centrului de greutate al masei reduse ($m_{red}$).

* $Q$ este sarcina pe roată care lucrează după direcția normalei la teren și trece prin axa roții și centrul de greutate al masei reduse;
$P$ — forța ce acționează asupra pistonului amortizorului;
$\varphi$ — unghiul dintre direcția de acționare a sarcinii $Q$ și direcția de deplasare a axei (centrului) roții.



Între coeficientul de transmitere al forțelor și deplasări există relația:

$$\frac{dy_1}{ds}=C_T, \qquad (15.48)$$

în care $s$ este cursa tijei pistonului.

În proiectare se utilizează obișnuit coeficientul de transmitere al forțelor medii, mărimea sa fiind dată de relația:

$$C_{T\,med}=\frac{1}{s}\int_0^s C_T\,ds=\frac{y_1}{s}=C_{Tx}, \qquad (15.49)$$

în care $C_{Tx}$ este coeficientul de transmitere pentru o poziție oarecare:

$$y=y_k+SC_{Tx}. \qquad (15.50)$$

Din relațiile (15.48) și (15.50) rezultă:

$$C_T=C_{Tx}+s\frac{dC_{Tx}}{ds}. \qquad (15.51)$$

Dacă

$$C=\text{const, rezultă } C_{Tx}=\text{const}.$$

Ținînd seamă de fig. 15.12, coeficientul de transmitere se determină cu relația $C_T=\frac{P}{Q}=\cos\varphi$. (15.52)

Lucrul mecanic consumat pentru amortizare este redat de curba eforturilor în timpul mersului, suprafața diagramei cuprinsă între curba de aplatisare, axa deplasării și ordonatele inițiale și finale fiind egală cu lucrul absorbit.

Lucrul mecanic este dat de relația:

$$L=\int_0^s P\,ds=\int_L^{y_1} Q\,dy_1. \qquad (15.53)$$

Modul de lucru al unui amortizor este caracterizat prin coeficientul de plenitudine $\eta$ al diagramei. Dacă în fig. 15.13, suprafața $O\,a\,b\,c\,e$ reprezintă lucrul mecanic real absolut și $O\,f\,c\,e$ lucrul mecanic maxim posibil de realizat cu condiția ca efortul maxim să fie constant, raportul de plenitudine este:

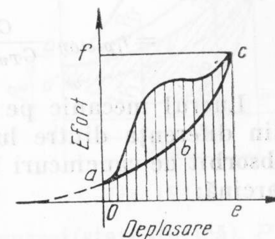



Fig. 15.13

$$\eta=\frac{O\,a\,b\,c\,e}{O\,f\,c\,e}. \qquad (15.54)$$

Pentru o cursă a pistonului completă

$$\eta_{roată} = \eta_{am} \left[ \frac{C_T}{C_{T_{med}}} \right]_{s\ final}, \quad (15.55)$$

unde:

$\eta_{roata}$ este coeficientul de plenitudine al lucrului mecanic de amortizare absorbit de roată;

$\eta_{am}$ — coeficientul de plenitudine al lucrului mecanic de amortizare absorbit de amortizor;

$s_{final}$ — cursa completă.

În proiectare se utilizează, de asemenea, noţiunea de coeficient de prestrîngere iniţială, dat de relaţia:

$$n_0 = \frac{Q_0}{Q_{st}}, \quad (15.56)$$

în care:

$Q_{st}$ este sarcina pe roată la staţionare;

$Q_0$ — sarcina pe roată corespunzătoare inceputului deplasării pistonului amortizorului.

Ţinînd seamă de notaţiile folosite

$$Q_0 = \frac{P_0}{C_{T_0}}. \quad (15.57)$$

Lucrul mecanic realmente absorbit

$$L = \eta_{am} p_{max} s_{final} = \eta_{am} C_{T max} Q_{max} s_{final} =$$

$$= \eta_{piston} \frac{C_T}{C_{T mediu}} Q_{max}\, y_{1 final} = \eta_{roată}\, Q_{max} y_{1\ final}. \quad (15.58)$$

Lucrul mecanic pe care trebuie să-l realizeze amortizorul rezultă din diferenţa dintre lucrul mecanic total (normat) şi lucrul mecanic absorbit de cauciucuri la o suprasarcină, dată de coeficientul de suprasarcină:

$$n_s = \frac{Q_{max}}{Q_{st}}. \quad (15.59)$$

$$L_{amortiz} = L_{normat} - L_{cauciuc}. \quad (15.60)$$



Deplasarea necesară a axei roţii este dată de relaţia:

$$y_{1 final} \frac{L_{normat} - L_{cauciuc}}{\eta_{roată}\, Q_{max}} = \frac{L_{normat} - \eta_{cauciuc}\, Q_{max}\, y_{k final}}{\eta_{roată}\, Q_{max}}, \quad (15\ 61)$$

în care: $\eta_{cauciuc}$ este coeficientul de plenitudine al diagramei lucrului mecanic absorbit de cauciucuri.

În baza relaţiilor stabilite se poate scrie:

$$Q_{max} = Q_{st}\, n_s = \frac{P_{max}}{C_{T final}};$$

$$Q_0 = O_{st} n_0 = \frac{P_0}{C_{T_0}}. \quad (15.62)$$

Făcînd raportul se obţine:

$$\frac{Q_{max}}{Q_0} = \frac{P_{max}}{P_0} \frac{C_{T_0}}{C_{T final}} = \frac{n_s}{n_0} \quad (15.63)$$

### 15.4.2. Amortizor hidropneumatic

#### 15.4.2.1 Calculul forţelor pneumatice

În cele mai multe cazuri, amortizorul hidropneumatic are ca lichid ulei şi ca fluid gazos, aer comprimat. Din această cauză, în mod curent se numesc amortizoare cu ulei-aer.

În diagrama din fig. 15.14 este reprezentată variaţia forţei preluate de amortizor în funcţie de deplasarea pistonului.

Celelalte mărimi de pe diagramă sînt:

— forţa dezvoltată de presiunea aerului asupra pistonului $P_a$; forţa de frecare în ghidaje $P_{fr}$; $P_{fr} = P_{fr \cdot p} + P_{fr \cdot g}$.

unde:

$P_{fr \cdot p}$ este forţa de frecare dezvoltată de piston;

$P_{fr \cdot g}$ — forţa de frecare dezvoltată de garnituri;

— forţa care rezultă din rezistenţa dezvoltată la trecerea lichidului prin orificiile pistonului, $P_1$;

Fig. 15.14

— forţa de rezistenţă a pistonului la inceputul cursei (stare statică), $P_0$.

Lucrul mecanic total consumat pentru amortizare este reprezentat în diagramă prin suprafaţa $O\ a\ d\ c\ e\ O$.

Lucrul mecanic consumat pentru comprimarea aerului și învingerea forțelor de frecare este dat de suprafața de sub curba *abc*.

În curba de revenire, lucrul mecanic consumat se compune din lucrul mecanic necesar pentru învingerea rezistenței lichidului la trecerea prin supapa inversă (suprafața de sub curba *a'd'c'*) și din lucrul mecanic consumat pentru învingerea frecărilor (suprafața de sub curba *a'b'c'*).

Lucrul mecanic consumat pentru amortizare în cursa de revenire este dat în diagramă de suprafața hașurată.

Suprafața cuprinsă între curbele *adc* și *a'd'c'* corespunde lucrului de histerezis (compus din lucrul lichidului și al forțelor de frecare în cursa directă și în cea de revenire).

Mărimea forțelor care acționează asupra pistonului amortizorului, indicate în diagrama amintită, depinde de forma sa constructivă; astfel, dacă orificiile de trecere în cursa directă a lichidului se micșorează, punctul *d* din diagramă se ridică, iar dacă se mărește suprafața acestor orificii, punctul *d* coboară. Dacă rezistența lichidului devine neglijabilă, în cazul unor orificii mari, amortizarea se va realiza numai prin consumarea lucrului mecanic realizat prin comprimarea aerului și învingerea frecărilor în bucșe și în garnituri, această situație corespunzînd unei amortizări cu aer.

Lucrul mecanic realizat prin procesul de compresie-destindere al aerului depinde de modul în care se desfășoară acest proces. El poate fi izotermic, adiabatic sau politropic, mărimea forței aerului care acționează asupra pistonului variind de la caz la caz.

Pornind de la ecuația politropei

$$(p_0+1)V_0^x-(p+1)V^x, \tag{15.64}$$

se deduce forța $P_a$ cu care aerul acționează asupra pistonului:

$$p_a=\left[(p_0+1)\left(\frac{V_0}{V}\right)^x-1\right]A, \tag{15.65}$$

unde: $p$ este suprapresiunea inițială a aerului;
$V_0$ — volumul inițial al camerei de aer;
$V$ — volumul la un moment dat al camerei;
$p$ — suprapresiunea la un moment dat al camerei de aer;
$A$ — suprafața pistonului;
$x$ — indicele transformării (în cazul transformării izoterme $x=1$, în cazul transformării adiabatice $x=1{,}4$).

În momentul inițial se observă că $V=V_0$, de unde rezultă

$$P_{a\cdot 0}=p_0A.$$



Dacă pistonul se deplasează, mărimea forței $P_a$ se schimbă. Ținînd seama de imprecizia cu care se stabilește coeficientul $x$, notînd cu $s$ înălțimea camerei la un moment dat și $s_0$, înălțimea inițială a camerei, se poate lua:

$$p_a=\frac{p_0A}{\left(\frac{V}{V_0}\right)^x}=\frac{p_0A}{\left(1-\frac{sA}{V_0}\right)^x}. \tag{15.66}$$

Știind că: $V=V_0-sA$, relația devine:

$$P_a=\frac{p_0A}{1-\left(\frac{s}{s}\right)^x}. \tag{15.67}$$

Suprapresiunea în camera de aer, pentru o anumită poziție a pistonului, este dată de relația:

$$p=\frac{p_0+1}{\left(\frac{V}{V_0}\right)^x}-1\approx\frac{p_0}{\left(\frac{V}{V_0}\right)^x}=\frac{p_0}{\left(1-\frac{sA}{V_0}\right)^x}. \tag{15.68}$$

La proiectare se folosesc forțele din momentul inițial, final și forța din timpul staționării. Pentru acestea rezultă relațiile:

$$P_{a0}=Kp_0A, \tag{15.69}$$

în care: $K$ este un coeficient care ține seama de frecare; $k=1{,}05\ldots1{,}20$;

$$P_{a\cdot final}=\frac{p_0A}{1-\frac{s_{final}}{s_0}x}; \tag{15.70}$$

$$P_{a\ static}=\left[(p_0+1)\frac{V_0}{V}-1\right]A\approx K_{cor}p_0\frac{V_0}{V}A, \tag{15.71}$$

unde $K_{cor}$ este un coeficient de corecție; ($K_{cor}\approx1$ la începutul cursei și $K_{cor}<1$ la sfîrșit).

#### 15.4.2.2. Stabilirea forțelor de frecare

La dimensionarea amortizoarelor hidraulice și hidropneumatice trebuie să se țină seama și de forțele de frecare, și anume de frecarea, garniturilor și de frecarea în ghidaje.

Frecarea garniturilor în jamba amortizorului depinde de stríngerea inițială a pachetului de etanșare, de presiunea în jambă și de coeficientul de frecare. Stríngerea inițială este mică și este de obicei preluată chiar

de presiunea inițială din cameră, astfel că poate fi neglijată. În fig. 15.15 este reprezentată o secțiune într-o garnitură de piele.

Coeficientul de frecare depinde de materialele folosite, de prelucrarea suprafețelor care se freacă și de presiunea uleiului în amortizor.

Mărimea forței de frecare a garniturilor este dată de relația:

$$p_{fr \cdot g}=\frac{\mu_0 \pi D h p_0}{\left(1-\frac{sA}{V_0}\right)^x}, \tag{15.72}$$

în care: $\mu_0$ este coeficientul de frecare;
$D$ — diametrul suprafeței de frecare;
$h$ — înălțimea de lucru a unei garnituri.

Fig. 15.15

### 15.4.2.3. Frecarea în ghidaje

Frecarea tijei pistonului în ghidaje depinde de particularitățile constructive ale jambei amortizorului, de forțele exterioare care acționează asupra sistemului și de coeficientul de frecare. Mărimea forței de frecare în ghidaje se poate calcula în mod expeditiv pe baza unei relații de forma:

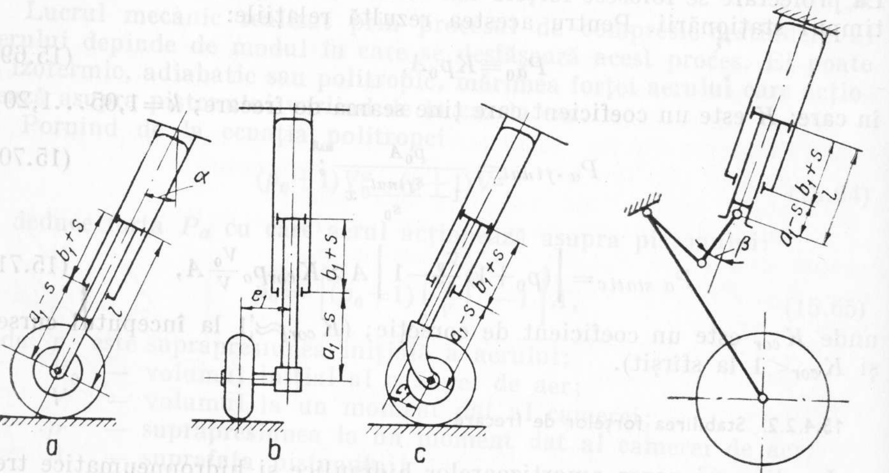


Fig. 15.16 Fig. 15.17

$$P_{fr}=\psi P,$$



unde $P$ este efortul total care se obține în amortizor, iar $\psi$ o funcție de $s$ (cursa pistonului), funcția care depinde de forma constructivă a jambei amortizorului. Expresia funcției $\psi$ este dată în tabela 15.1, în funcție de tipul jambei indicat în fig. 15.16 și 15.17.

*Tabela 15.1*

**Valorile funcției ψ pentru diferite tipuri de suspensii**

| Tipul suspensiei | $\psi(s)$ |
|---|---|
| Axială (fig. 15.16, *a*) | $\mu_0 \frac{2a_1+b_1-s}{b_1+s} \operatorname{tg} \alpha$ |
| În consolă (fig. 15,16, *b*) | $\frac{\mu_0}{b_1+s}\left[\sqrt{(a_1+b_1)^2 \operatorname{tg} \alpha+e_1^2}+\sqrt{(a_1-3) \operatorname{tg} \alpha+e_1^2}\right]$ |
| Cu roata deplasată în spate (fig. 15.16, *c*) | $\frac{\mu}{b_1+s}\left[(2a_1+b_1-s) \operatorname{tg} \alpha-2c_1\right]$ |
| Suspensii cu pîrghii de tipul bielă-manivelă (fig. 15.17) | pentru $s<a_1$<br>$\mu_0 \frac{2a_1+b_1-s}{b_1+s} \operatorname{tg} \beta$<br>pentru $s \geqslant a_1$<br>$\mu_0 \operatorname{tg} \beta$ |

### 15.4.2.4. Rezistența hidraulică

Forța dezvoltată de rezistența orificiilor la trecerea lichidului dintr-o cameră a amortizorului în alta este dată de relația:

$$P_1=\frac{\rho(A_p+A_0)A_P^2}{2A_0^2}s^2 \approx \frac{\rho A^3{}_P}{2A_0^2}s^2, \tag{15.73}$$

iar suprapresiunea uleiului dislocuit de pistonul plonjelor este dat de relația:

$$p_{ulei\ disl}=(p_u-p_a)=\frac{P_2}{A}10^{-4}=\zeta\frac{\rho v^2}{2}10^{-4}=\zeta\frac{\rho}{2}\left(\frac{A_p}{A_0}\right)s^2 10^{-4}, \tag{15.74}$$

în care: $p_u$ este presiunea uleiului, în kgf/cm²;
$p_a$ — presiunea aerului, în kgf/cm²;
$v$ — viteza jetului de lichid, în m/s;
$A_p$ — suprafața pistonului plonjor, în m²;
$A_0$ — suprafața orificiilor de trecere, în m²;

$s$ este viteza pistonului față de cilindru, în m/s;
$\zeta$ — coeficient de rezistență hidraulică;
$\rho$ — densitate lichidului, în kgf·s²/m⁴; $\rho=\frac{\gamma}{g}$ ($\gamma$, fiind greutatea specifică).

Mărimea coeficientului de rezistență hidraulică $\zeta$ depinde de viscozitatea și de viteza de mișcare a lichidului, precum și de forma orificiului. Practic se iau pentru $\zeta$ valori cuprinse între 2 și 2,5 pentru orificii cu muchii ascuțite și 1, 2 pentru muchii rotunjite.

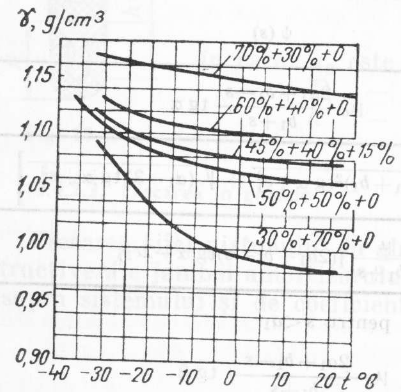



Fig. 15.18

În diagrama din fig. 15.18 se dau valorile greutății specifice $\gamma$ pentru lichid de amortizor alcool-glicerină-ulei.

Mărimea suprafeței orificiilor de scurgere se stabilește pe baza relației:

$$A_0=k's_{final}A_p\sqrt{\frac{\zeta\gamma A_p(n_s-k'')}{L_{normat\ ulei}\,C_{T\,final}}},\qquad(15.75)$$

în care: $n_s$ este coeficientul de suprasarcină la exploatare (paragr. 15.4/1);
$L_{normat\ ulei}$ este lucrul mecanic normat (proiectat) pentru ulei, în kgf·m;
$k'$ = 0,4–0,5;
$k''$ = 0,25.

### 15.4.2.5. Proiectarea amortizoarelor cu ulei-aer

La dimensionarea amortizoarelor cu ulei-aer (hidropneumatice) se utilizează relațiile de calcul prezentate, ținînd seamă de datele specifice construcției.

În funcție de vehiculul la care se montează amortizorul se determină inițial sarcina de staționare pe roată, și pe baza ei se stabilește pneul cauciucurilor, presiunea în cauciuc și curba de lucru (aplatisare) a cauciucului ($Q$ în funcție de deformația $yk$).

În funcție de condițiile de lucru ale autovehiculului se stabilesc masa redusă pe o roată $m_{red}$ și mărimea lucrului mecanic de exploatare normat. Se alege coeficientul de suprasarcină la exploatare $n_S=\frac{Q_{max}}{Q_{st}}$.

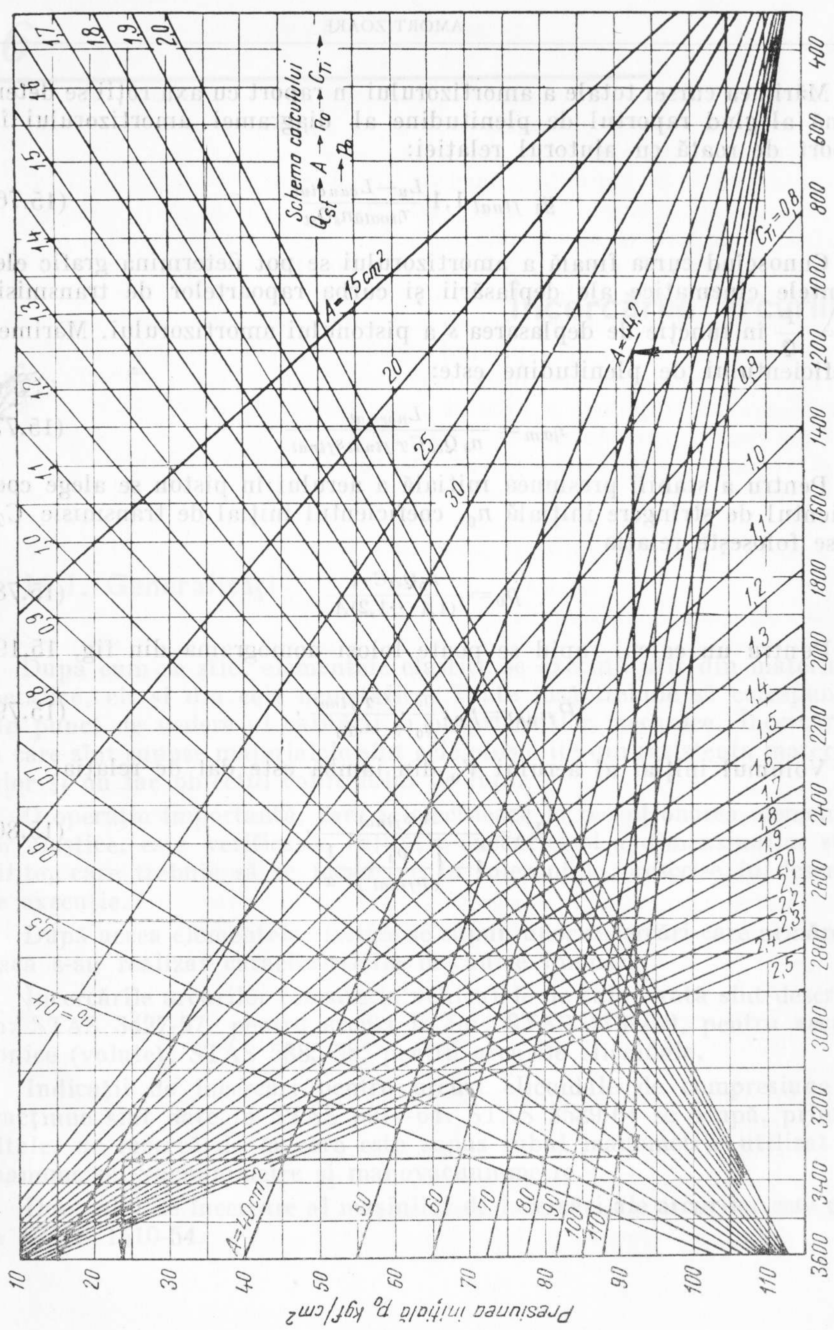



Fig. 15.19

Mărimea cursei totale a amortizorului în raport cu axa roţii se determină alegînd raportul de plenitudine al diagramei amortizorului în raport de roată cu ajutorul relaţiei:

$$y_{1\,final}\,1{,}1\,\frac{L_u - L_{cauciuc}}{\eta_{roată}\, n_s Q_{st}} \qquad (15.76)$$

Cunoscînd cursa finală a amortizorului se pot determina grafic elementele cinematice ale deplasării şi curba rapoartelor de transmisie $C_T = \frac{P}{Q}$ în funcţie de deplasarea $s$ a pistonului amortizorului. Mărimea coeficientului de plenitudine este:

$$\eta_{am} = \frac{L_{normat}}{n_s\, Q_{st}\, C_{T\,final}\, s_{final}} \qquad (15.77)$$

Pentru a stabili presiunea iniţială a aerului în piston se alege coeficientul de strîngere iniţială $n_0$, coeficientul iniţial de transmisie $C_{Ti}$ şi se foloseşte relaţia

$$p_0 = \frac{n_0 Q_{st} C_{Ti}}{(1{,}1 \cdots 1{,}2)A} \qquad (15.78)$$

Pentru un calcul rapid se poate folosi nomograma din fig. 15.19.

$$P_{final} = p_0 \cdot \frac{n_s}{n_0} \cdot \frac{C_{T\,final}}{C_{T0}}\,. \qquad (15.79)$$

Volumul iniţial al aerului $V_0$ din jambă este dat de relaţia:

$$V_0 = \frac{A \cdot s_{final}}{1 - \left(\frac{p_0}{p_{final}}\right)\frac{1}{x}}\,. \qquad (15.80)$$

# 16

# Încercările arcurilor

## 16.1. Generalităţi

După cum se ştie, elementele elastice se execută atît din materiale metalice, cît şi din cele nemetalice. Toate însă trebuie să corespundă din punct de vedere al calităţii şi proprietăţilor mecanice. Încercările la care sînt supuse materialele sînt cele obişnuite din rezistenţa materialelor şi nu fac obiectul capitolului de faţă.

O operaţie importantă, care se efectuează la recepţionarea elementelor elastice, este verificarea calităţii execuţiei şi a dimensiunilor stabilite, care trebuie să se încadreze în toleranţele prescrise în desenul de execuţie.

După aceea elementele elastice se supun unor încercări care urmăresc dacă s-au realizat caracteristicile mecanice impuse.

Încercările arcurilor folosite la vehiculele de cale ferată sînt descrise în: STAS 3427-57, pentru arcuri în foi; STAS 4131-59, pentru arcuri conice (volute); STAS 5885-58, pentru arcurile elicoidale.

Indicaţii de încercări pentru arcuri elicoidale de compresiune şi tracţiune sînt date în STAS 6917-64. STAS 3589-64 se ocupă, printre altele, de încercările la care este supus tubul manometric utilizat la manometre, vacuummetre şi manovacuummetre.

Domeniul de încercare al maşinilor de încercări ale arcurilor este dat în STAS 1510-54.

În general, încercările mecanice ale arcurilor se clasifică în:
— încercări la solicitări statice;
— încercări la solicitări dinamice;
— încercări la solicitări repetate (oboseală);
— încercări speciale, la care sînt supuse arcurile care lucrează în condiţii deosebite (temperatură ridicată, medii corosive etc.);
— încercări ale elementelor elastice speciale (silfoane, membrane, tub manometric, amortizoare etc.).

Încercarea la solicitarea statică a arcurilor este încercarea mecanică la care este supus un arc aplicînd asupra lui lent, progresiv o sarcină de tracţiune, compresiune, încovoiere sau răsucire, după direcţia corespunzătoare de solicitare a arcului respectiv.

Prin încercarea statică se urmăreşte:
— trasarea caracteristicii reale de funcţionare a arcului;
— determinarea sarcinii corespunzătoare deformaţiei maxime a arcului sau a sarcinii corespunzătoare ruperii;
— determinarea rigidităţii arcului:

$$c=\frac{\text{sarcină}}{\text{deformaţie}} \text{ sau a flexibilităţii; } \frac{1}{c}.$$

Încercarea statică se poate executa prin: determinarea deformaţiei arcului corespunzătoare unei sarcini stabilite şi determinarea sarcinii necesare pentru realizarea unei deformaţii stabilite.

Încercarea la solicitări repetate a arcurilor sau încercarea la oboseală se execută pentru a se determina deformaţia remanentă după un număr oarecare de cicluri sau, din punct de vedere tehnologic, se urmăreşte cîte cicluri suportă arcul pînă la rupere. Prin această încercare se poate aprecia durata de funcţionare a arcului.

Din seria încercărilor speciale interesează în special cele aplicate arcurilor care lucrează la temperaturi ridicate şi care sînt supuse fenomenului de relaxare a tensiunilor, însoţit de deformaţii permanente.

## 16.2. Încercarea arcurilor în foi

### 16.2.1. Încercarea la solicitarea statică

Această încercare mecanică are ca scop trasarea caracteristicii arcului atît la încărcare, cît şi la descărcare, Forma caracteristicii arcului este influenţată de următorii factori:
— montarea corectă a foilor în arc;



— frecarea foilor între ele pe suprafeţele de contact;
— modificările curburii foilor şi ale formei arcului;
— diferenţele relative eventuale ale caracteristicilor mecanice ale materialelor din care sînt executate foile componente.

În diagrama din fig. 16.1 este dată abaterea caracteristicii unui arc de la forma liniară, în cazul cînd unele foi sînt deplasate.

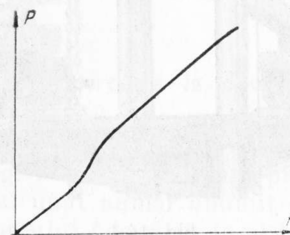



Fig. 16.1

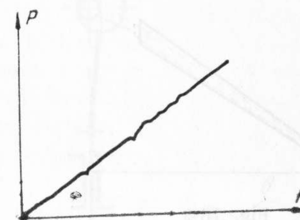



Fig. 16.2

Dacă suprafaţa de contact dintre foi nu este omogenă, atunci frecarea variază de la o poziţie la alta a arcului deformat şi caracteristica acestuia îşi pierde din liniaritate, avînd forma din fig. 16.2.

Caracteristica este influenţată şi de calitatea suprafeţelor, şi de ungere. Influenţa este sensibilă mai ales la deplasarea caracteristicii de descărcare faţă de cea de încărcare. În fig. 16.3 sînt date caracteristicile aceluiaşi arc în două situaţii. Cu linie plină este reprezentată caracteristica arcului neuns şi cu foile ruginite, iar cu linie întreruptă caracteristica aceluiaşi arc cu foile curăţate şi unse.

Arcurile de foi se încearcă la diferite maşini de încercări mecanice, care sînt prevăzute cu dispozitive speciale de prindere a arcului.

Dispozitivul de prindere din fig. 16.4 este prevăzut cu o placă în legătură cu sistemul de producere a sarcinii, care acţionează asupra legăturii arcului şi două reazeme montate pe cărucioare pe role, care permit deplasarea liberă a capetelor arcului în foi sub acţiunea sarcinii.

În fig. 16.5 este reprezentată schema de funcţionare a maşinii de încercat, pe care este montat un astfel de dispozitiv. Arcul *1* este montat pe cărucioarele pe role *2*, care se pot deplasa liber pe traversa *3*. Sarcina se aplică legăturii arcului de către tija *4* a pistonului unei maşini hidraulice.

Valoarea sarcinii se măsoară cu un manometru-pendul. Presiunea din cilindrul principal este transmisă în cilindrul *5* al manometrului şi prin intermediul pistonului *6* este pus în mişcare echipamentul mobil

al manometrului împreună cu contragreutatea 7. Un ac indicator dă posibilitatea citirii valorii sarcinii. Deformaţia sub sarcină este indicată

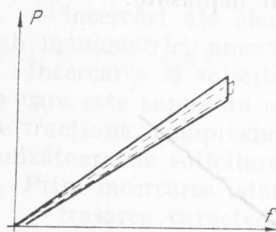



Fig. 16.3

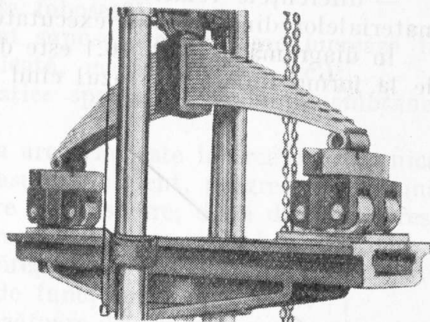


Fig. 16.4

pe o scară gradată montată pe coloana fixă a maşinii de încercat de către un indicator fixat pe pistonul maşinii. Pentru o măsurare mai precisă se utilizează ceasuri comparatoare cu precizia indicaţiei de 0,01 mm, montate pe traversa fixă şi acţionate prin deplasarea legăturii arcului.

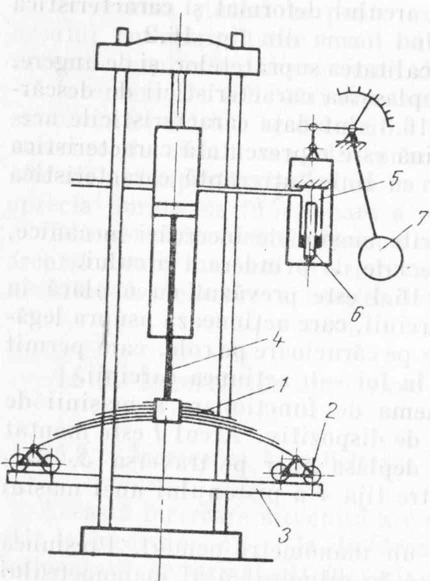



Fig. 16.5

Pentru încercarea la solicitare statică, sarcina se aplică progresiv de la valoarea zero pînă la valoarea sarcinii de probă.

Sarcina statică maximă, conform STAS 3427-57, este:

$$P_{max} = \frac{\sigma n b h^2}{1,5 \times 2 l_1} \quad (16.1)$$

unde:

$\sigma$ este rezistenţa oţelului pentru arcuri, în kgf/mm²;
$n$ — numărul de foi;
$b$ — lăţimea foii, în mm;
$h$ grosimea foii, în mm;
$2l_1$ distanţa între axele ochiurilor în stare îndreptată a foii principale.



Sub sarcina de probă dată de relaţia (16.1) se urmăreşte realizarea săgeţii indicate pe desen. După descărcarea arcului se verifică dacă deformaţia remanentă se încadrează în limitele admise.

Pentru obţinerea caracteristicii arcului la încărcare şi la descărcare se înregistrează un număr suficient de valori sarcină-deformaţie, cu care se poate trasa prin puncte linia caracteristică.

### 16.2.2. Încercarea la oboseală

Încercarea la oboseală a arcurilor (fig. 16.6) se realizează prin aplicarea unui număr anumit de cicluri arcului 1 de către un piston 2, acţionat de un excentric 3. Capetele arcului sînt montate pe cărucioarele 4, care se pot deplasa pe traverse 5. Printr-un sistem hidraulic sarcina este măsurată la manometrele 6. Maşina are adaptat un contor pentru înregistrarea numărului de cicluri la care este supus arcul.

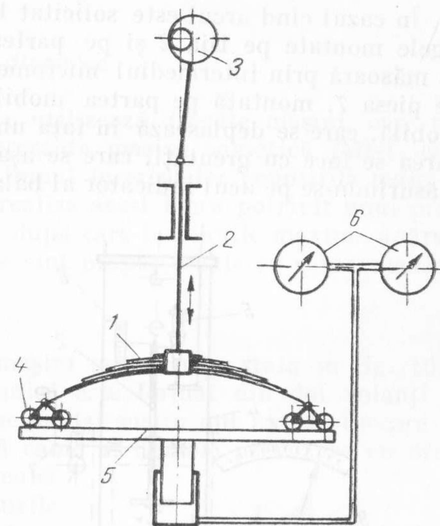



Fig. 16.6

Încercarea se poate efectua prin înregistrarea numărului de cicluri pînă la rupere sau prin măsurarea deformaţiei remanente pentru un anumit număr de cicluri.

## 16.3. Încercările arcurilor elicoidale de compresiune şi tracţiune

### 16.3.1. Încercarea la solicitarea statică

La această încercare sarcina se aplică progresiv pînă la valoarea sarcinii maxime care, la arcurile de compresiune, este realizată atunci cînd spirele vin în contact. Pentru arcurile de tracţiune ea este indicată pe desen.

În fig. 16.7 este reprezentată o mașină de încercat arcuri, în general pentru sarcini mici.

Arcul de compresiune *1* este montat între două platouri plane. Tija *2*, la care este montat unul dintre platouri, poate fi deplasată prin sistemul de manivele *3*, atît cu manevrare rapidă, cît și cu manevrare lentă, prin intermediul unui șurub melc-roată melcată.

În cazul cînd arcul este solicitat la întindere, el se fixează între cîrligele montate pe tija *2* și pe partea mobilă *4* a mașinii. Deformația se măsoară prin intermediul micrometrului *5*, fixat pe tija *2* și acționat de piesa *7*, montată pe partea mobilă și de rigla *6* montată pe partea mobilă, care se deplasează în fața unui indicator fixat pe tija *2*. Încărcarea se face cu greutăți, care se așază pe platanul *8*, sarcina aplicată măsurîndu-se pe acul indicator al balanței *9*. Pentru descărcare aparatul este prevăzut cu amortizorul hidraulic *10*.

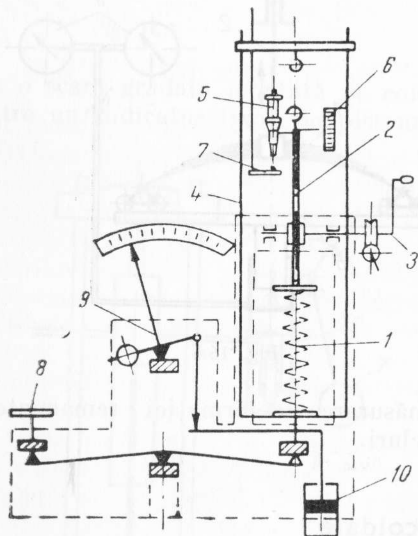



Fig. 16.7

Pentru arcuri care lucrează la sarcini mari se utilizează mașini de încercat cu acționare mecanică sau hidraulică. Arcul se montează între platouri, dacă se încearcă la compresiune sau se fixează în cîrlige pentru încercarea la tracțiune.

Încercările statice se execută în următoarele situații:

*Încercări de elasticitate* de scurtă durată, la care se aplică sarcina pentru realizarea înălțimii minime timp de 2—3 min (pentru compresiune). La arcurile de tracțiune se aplică sarcina maximă calculată. După descărcare se măsoară înălțimea arcului a cărei variație trebuie să fie cuprinsă în toleranțele admise.

*Încercări de flexibilitate*, la care se aplică sarcina progresiv, pînă la sarcina maximă. Se determină flexibilitatea (inversul rigidității c), în $\frac{\text{mm}}{\text{tf}}$.

*Încercări de elasticitate de lungă durată.* Se execută o comprimare sau întindere timp de 2—3 min, după care se descarcă arcul, supunîndu-se după aceea aceleiași sarcini timp de 48 de ore. Se măsoară înălțimea arcului după fiecare solicitare, urmărind ca ea să se înscrie în toleranțele admise.



Se poate trasa caracteristica reală de funcționare a arcului (încărcare-descărcare), măsurîndu-se diverse valori ale sarcinii și săgeții corespunzătoare.

### 16.3.2. Încercarea la solicitări dinamice

Pentru acest fel de încercări se utilizează diferite mașini, care pot produce sarcini repetate. Se va prezenta mașina sovietică IMI-1, care are avantajul de a reproduce în timpul încercărilor condițiile reale de funcționare ale arcului. Se poate realiza acest lucru potrivit unui principiu din rezistența materialelor, după care tensiunile maxime apărute în arcul supus deformării dinamice sînt proporționale cu suma maximă a vitezelor $\left|\sum_{i=1}^{n} v_i\right|_{max}$.

Schema cinematică a acestei mașini este reprezentată în fig. 16.8.

Mecanismul de solicitare dinamică este format din doi volanți *1*, care sînt montați pe arborele principal și susțin opt axe *2*. Fiecare ax are la capete rolele *3* și cîte două came *4*. Camele prevăzute cu arcurile lamelare *5* se pot deplasa împreună cu axele în direcție radială în tăieturile volanților, cu ajutorul unor șuruburi și glisiere. Rolele se deplasează pe șabloanele de copiat *6*, care asigură o mișcare rectilinie a camelor pe porțiunea compresiunii forțate a arcurilor încercate. Solicitarea arcurilor se realizează cu ajutorul camelor prin intermediul flanșei *7*. Arcurile studiate *8*, așezate pe ghidajele fixe *9*, se reazemă cu capetele inferioare, prin intermediul flanșei, pe capul special *10*, asupra căruia acționează capetele mecanismului de solicitare dinamică. Acest cap lunecă de jos în sus pe tija centrală *11*, comprimînd arcurile. Pentru absorbirea energiei părților mobile, la capătul cursei (atunci cînd capul *10* se află în poziția superioară și inferioară sînt prevăzute dispozitivele

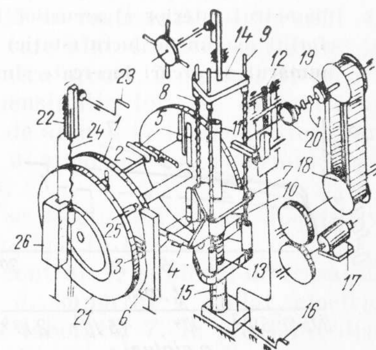



Fig. 16.8

speciale de amortizare *12* și *13*. Reazemul superior al arcurilor, care constă în glisiera *14*, are posibilitatea să se deplaseze în ghidajele colectorului cu ajutorul unei cremaliere. Reglarea cursei capătului mobil al arcului se realizează prin coborîrea sau ridicarea capului *10* cu ajutorul garniturii de inele *15*. Prin reglarea razei loviturii, întregul colector se deplasează pe batiu cu ajutorul șurubului *16*, în direcție orizontală. Principiul care stă la baza mișcării capătului mobil al arcului poate fi înregistrat cu ajutorul unui vitezometru cu tambur de înregistrare. Mașina este acționată de motorul electric *17*, prevăzut cu variatorul de viteză *18*. Cuplul este transmis arborelui mașinii prin cuplajul cu discuri de fricțiune *19*, care poate fi blocat de frîna cu discuri *20*. Volantul *21* reprezintă un dispozitiv de copiere avînd un canal al cărui profil corespunde principiului prescris de solicitare.

Mașina mai este înzestrată cu suportul *22*, pe care se află dispozitivul *23*, pentru fixarea și reglarea arcului *24*. La rotirea volantului, tija *25* se deplasează cu una din rolele sale pe profilul canalului volantului, iar cu a doua rolă în ghidajul liniar *26*, fixat pe suport. În acest fel, arcul studiat este comprimat între tijă și dispozitivul *23*, după principiul care stă la baza solicitării.

Caracteristicile mașinii sînt următoarele:

| | |
|---|---|
| cursa de lucru a arcului | 2—150 mm; |
| numărul de lovituri | 400—350/min; |
| diametrul interior al arcurilor încercate | 2—40 mm; |
| efortul maxim de lucru (static) | pînă la 90 kgf; |
| numărul de arcuri încercate simultan *1* sau *3*. | |

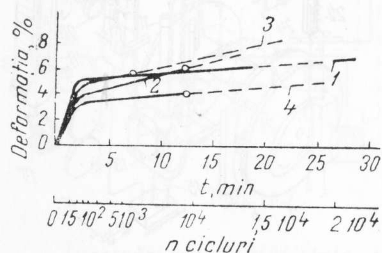


Fig. 16.9

În fig. 16.9 este dată diagrama deformației și rezistenței la oboseală a unor arcuri identice ca dimensiuni și material, a căror suprafață a fost prelucrată diferit, după cum urmează: arcuri prelucrate prin împroșcare cu alice, curba *1*; arcuri neprelucrate, curba *2*; arcuri supuse lustruirii hidraulice, curba *3*; arcuri lustruite, curba *4*.

Pe porțiunea linie continuă este reprezentată rezistența la oboseală a arcurilor fără deteriorări, iar pe porțiunea linie întreruptă, zona deteriorărilor.



Arcurile încercate sînt executate din oțel Arc 3 și au: $d=1,2$ mm, $D_m=10,4$ mm, $H_0=410$ mm. Viteza maximă de comprimare este de 10,4 m/s, iar numărul ciclurilor 740 cicluri/min.

Se observă din figură că în cazul arcurilor încercate, care lucrează cu ciocnirea reciprocă a spirelor prin inerție, prelucrarea cu alice mărește rezistența la oboseală.

Un factor foarte important care influențează rezistența la oboseală este deci modul de prelucrare a suprafeței arcurilor.

### 16.3.3. Încercarea de relaxare a tensiunilor

Pentru arcurile care lucrează la temperaturi înalte este necesară încercarea de relaxare, care constă în măsurarea deformației remanente a arcurilor menținute un anumit timp la temperaturi înalte sub sarcină constantă.

Dispozitivele utilizate se compun dintr-un mecanism de încărcare, construit din oțel inoxidabil și dintr-un comparator de tip ceasornic, cu diviziuni de 0,01 mm, pentru măsurarea variației înălțimii arcurilor înainte și după încercare. Un astfel de mecanism de încărcare utilizat este reprezentat în fig. 16.10.

El este format din garnitura de plăci de formă pătrată *1* și *2*, între care se montează pe axa dispozitivului bucșele fixe *3*, pentru orice înălțime a arcului încercat. Strîngerea axială se realizează cu șurubul *4*.

Fiecare placă *2* are nouă găuri prin care sînt trecute știfturile de fixare *5*, acestea servind și ca dornuri pentru arcuri. Numărul de arcuri introduse în dispozitiv depinde de dimensiunile lor. În dispozitivul din figură, realizat pentru un tip anumit de arcuri, se introduc simultan 54 de arcuri. Înălțimea de comprimare a arcurilor s-a determinat în funcție de efortul unitar inițial prescris.

Măsurarea variației săgeții arcurilor se efectuează la un dispozitiv special cu „electrosondă", reprezentat în fig. 16.11.

Dispozitivul este format din placa de control *1*, șublerul de trasaj *2*, cu două brățări mobile, comparatorul *3*, suportul *4* izolat electric de talpa *5*, lampa *6* și transformatorul de laborator *7*. În prealabil dispozitivul se reglează la zero cu o cală planparalelă.

La măsurătorile următoare, comparatorul indică abaterea înălțimii față de înălțimea inițială. Atingerea cît de slabă a marginii arcului *8* de planul de măsurare a șublerului este înregistrată prin aprinderea lămpii electrice. Săgeata inițială se poate calcula ca diferență a înălțimii libere a arcului și a înălțimii sale de strîngere.

Tensiunea inițială creată în arc are valoarea:

$$\tau_0 = \frac{8 D_0 k P_0}{\pi d_0^3} \qquad (16.2)$$

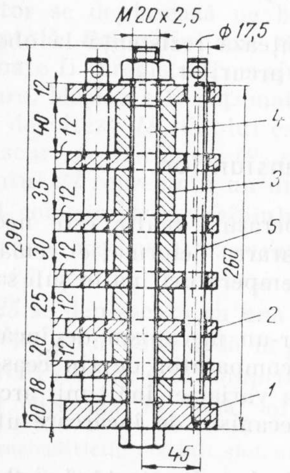



Fig. 16.10

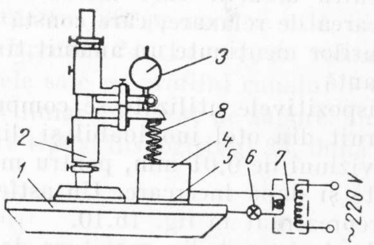



Fig. 16.11

sau

$$\tau_0 = \frac{d_0 k G_0}{D_n D_0^2} f_0, \qquad (16.3)$$

unde:

$\tau_0$ este efortul unitar, în kgf/mm²;
$D_0$ — diametrul mediu, în mm;
$d_0$ — diametrul sîrmei, în mm;
$n$ — numărul spirelor, de lucru;
$f_0$ — săgeata, în mm;
$G_0$ — modulul de elasticitate transversal, kgf/mm²;
$P_0$ — sarcina, în kgf;
$k$ — un coeficient de corecție, care depinde de forma secțiunii și de raportul de formă al arcului. Indicele „0" se referă la valorile măsurate la temperatura camerei.

Dispozitivul se introduce într-un cuptor electric, se încălzește pînă la temperatura prescrisă, se menține un timp determinat și apoi se răcește.



Se măsoară la dispozitivul descris săgeata remanentă $f_t$.

Efortul unitar corespunzător acestei săgeți:

$$\tau_t = \frac{d_0 k G_0}{n D_0^2} f_t \qquad (16.4)$$

sau

$$\tau_t = \frac{f_t}{f_0} \tau_0. \qquad (16.5)$$

Pierderea de tensiune:

$$(\Delta\tau)_t = \frac{(f_0 - f_t)}{f_0} \tau_0. \qquad (16.6)$$

Indicele „$t$" se referă la valoarea care caracterizează temperatura de încercare $t$°C.

Construind curbe de variație a efortului unitar $\tau$ funcție de timpul de menținere sub sarcină la o temperatură dată, se observă o scădere mare la început și o scădere ulterioară destul de lentă a tensiunii $\tau$. În fig. 16.12 sînt trasate curbele de relaxare pentru temperatura de 180°C (16.12, *a*), 300°C (fig. 16.12, *b*) și 400°C (fig. 16.12, *c*) pentru un arc efectuat din oțel 30 Cl30 (curba *1*), oțel 40Cl30 (curba *2*) și oțel Arc 1 (curba *3*).

Această încercare are o mare importanță pentru studiul comportării arcurilor care lucrează la temperaturi înalte. Prin utilizarea unor materiale corespunzătoare se realizează arcuri la care variația efortului unitar este redusă, prezentînd stabilitate în timp, în scopul păstrării proprietăților mecanice la temperaturi înalte.

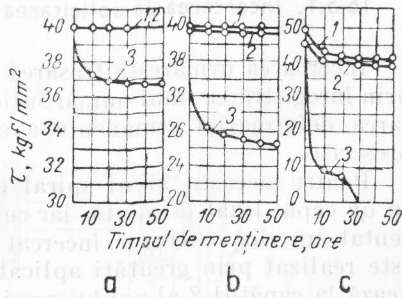



Fig. 16.12

## 16.4. Încercarea arcurilor elicoidale de torsiune

Încercarea statică se realizează prin aplicarea gradată a unui moment de răsucire a axului la care este montat arcul. În fig. 16.13 este repre-

zentată o schemă a dispozitivului de încercat arcuri elicoidale de răsucire care pot prelua sarcini mici. Sarcina se aplică prin intermediul unui disc acționat tangențial de o serie de greutăți așezate pe un taler. Arcul *1* are un capăt prins în piesa fixă *2*, iar celălalt capăt în discul mobil *3*. Greutățile *4* produc un moment de răsucire a discului. Discul are trasat pe el gradații, dînd posibilitatea citirii unghiului său de rotație. După încercarea la momentul de răsucire prescris se descarcă arcul și se citește deformația unghiulară remanentă. Încercările arcurilor care pot prelua sarcini mari fac după aceeași schemă, producerea sarcinii realizîndu-se prin metodele mecanice.

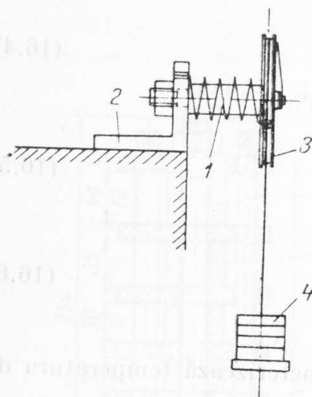


Fig. 16.13

## 16.5. Încercările arcului spiral plan

### 16.5.1. Încercarea la solicitarea statică

Încercarea urmărește trasarea caracteristicii de funcționare a arcului prin înregistrarea unui număr suficient de valori moment-unghi sau măsurarea deformației remanente a arcului în urma aplicării unei sarcini prescrise.

Pentru aceasta arcul spiral este montat în interiorul unei casete, cu un capăt fixat la casetă, iar cu celălalt la ax. În fig. 16.14. este reprezentat un dispozitiv de încercat arcuri spirale mici, la care momentul este realizat prin greutăți aplicate la capătul pîrghiei *1*. Pîrghia acționează la capătul *2* al axului mașinii de încercat. Axul e montat în două lagăre *3*, în partea din față aflîndu-se caseta *4*, în care se montează arcul spiral *5*. Deformația unghiulară este indicată pe cadranul *6*.

Pentru arcuri mai mari, care necesită unghiuri mari de rotație, se utilizează instalația din fig. 16.15, unde sarcina este aplicată axului *1*, prin intermediul rolei solidare cu el, *2*. Rola este acționată, în funcție de mărimea cuplului, de un cablu fixat pe ea fie încărcat la un capăt cu greutățile *3*, fie tras pe verticală în sus de mecanismul de ridicare



al unei macarale prin intermediul dinamometrului *4*, pentru măsurarea sarcinii.

Instalația este asemănătoare cu cea precedentă, arcul *5* fiind montat în caseta *6*.

Un exemplu de caracteristică a unui arc spiral este dat în fig. 16.16, unde se observă diferențe între curba de încărcare *1* și cea de descărcare *2*.

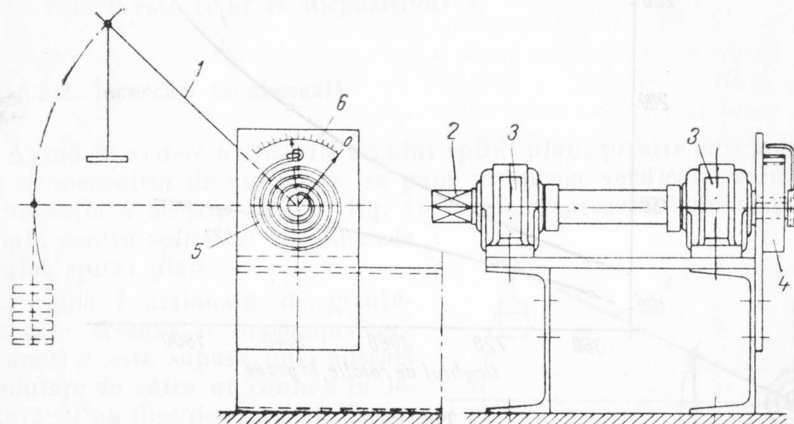


Fig. 16.14

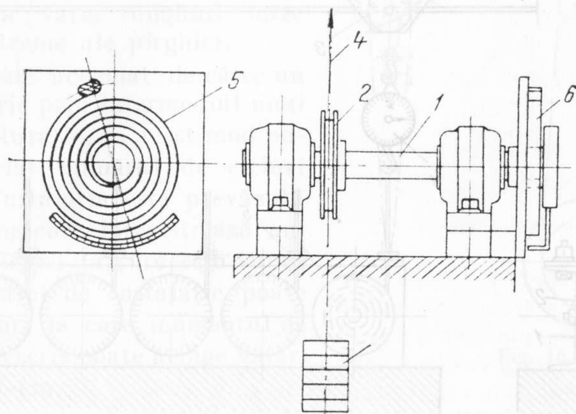


Fig. 16.15

Diferenţa este accentuată pentru unghiuri mari de rotaţie, cînd spirele arcului vin în contact şi cînd intervine frecarea dintre ele.

Arcul spiral este supus şi încercării statice de durată. Pentru aceasta el este menţinut încărcat sub sarcina de probă timp de 48 de ore, după

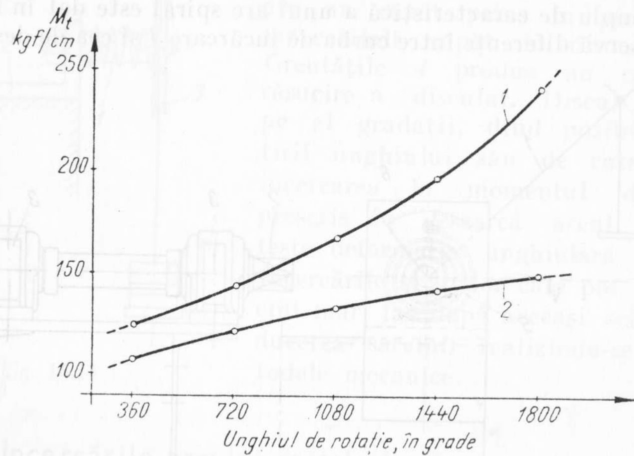



Fig. 16.16

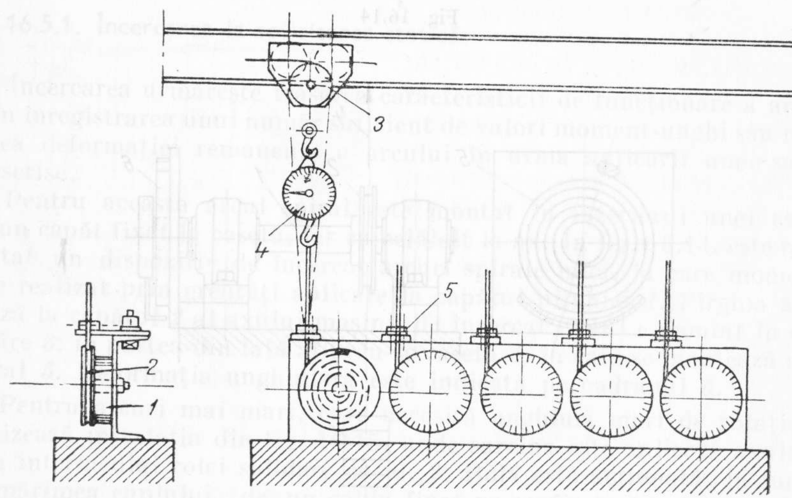



Fig. 16.17



care, descărcîndu-se, se măsoară deformaţia unghiulară remanentă.

În fig. 16.17 este reprezentat un dispozitiv pentru încercarea de durată a mai multor arcuri.

Arcul montat în caseta *1* este acţionat prin intermediul rolei *2* de către mecanismul de ridicare *3* al unei macarale, prin intermediul dinamometrului *4*. După încărcarea la sarcina prescrisă, cablul care acţionează rola *2* este fixat în dispozitivul *5*.

### 16.5.2. Încercări la oboseală

Avînd în vedere utilizările arcului spiral plan, printre care folosirea lui ca mecanism de antrenare, se pune problema verificării rezistenţei la oboseală a acestui arc. În fig. 16.18 este reprezentat un dispozitiv simplu pentru solicitări repetate ale arcului spiral plan.

Pîrghia *1* acţionată de greutăţile care creează o precomprimare în arcul *2*, este supusă unei mişcări pendulare de către un cablu *3* în legătură cu un disc de rotaţie *4*. Legătura se face printr-un bolţ cu rulment, raza la care se montează bolţul pe disc putînd fi modificată, pentru a putea varia unghiul între poziţiile extreme ale pîrghiei.

Discul este acţionat de către un motor electric prin intermediul unui variator de turaţie, în acest mod putînd fi variat numărul de cicluri pe minut. Instalaţia este prevăzută cu un contor care înregistrează numărul de cicluri la care este supus arcul. O astfel de instalaţie poate încerca arcuri la care momentul de încercare prescris poate atinge valori de 7 500 kgf·cm.

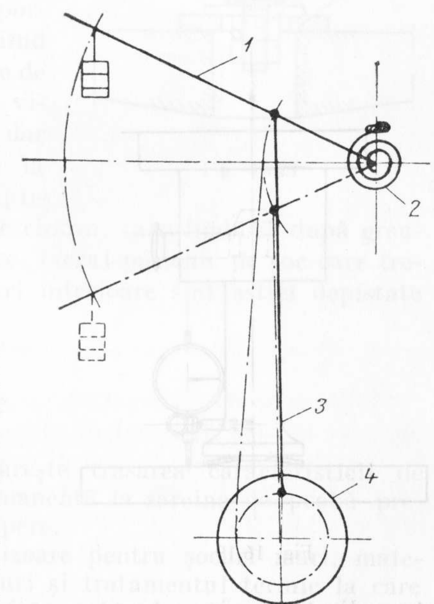



Fig. 16.18

După efectuarea încercării se măsoară deformaţia remanentă a arcului, care trebuie să se încadreze în toleranţele impuse.

## 16.6. Încercarea arcurilor-disc

### 16.6.1. Încercarea la solicitări statice

În funcție de forța pe care o poate dezvolta mașina încercarea se poate face pentru un singur disc sau pentru arcul-disc grupat.

În fig. 16.19 este reprezentat schematic un disc montat în dispozitivul de încercare al unei mașini. Deformația discului este înregistrată cu un ceas comparator cu precizia de 0,01 mm.

În cazul încercării unui arc-disc grupat se utilizează mașini puternice de tipul celor utilizate în laboratoarele de rezistența materialelor pentru încercări mecanice.

În fig. 16.20 este reprezentată schema instalației de încercat pentru un astfel de arc. Arcul-disc *1* este montat pe dornul *2*, asupra căruia

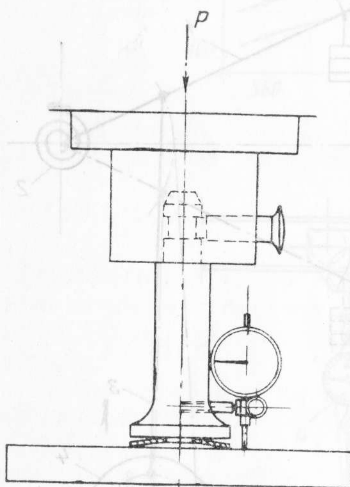



Fig. 16.19

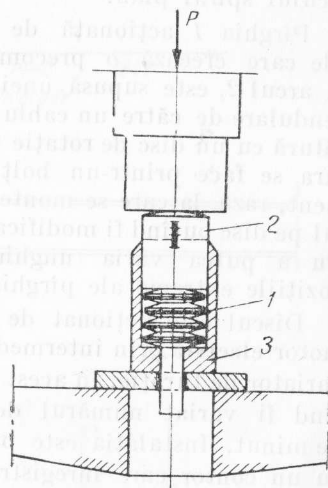



Fig. 16.20

ste aplicată sarcina. Arcul se montează în interiorul carcasei *3*, care erveşte la ghidare și ca protecție în cazul ruperii vreunui disc. Deformația se măsoară pe o scară gradată trasată pe dorn sau montînd coresunzător un comparator. După descărcare se măsoară deformația remaentă.



Pentru încercarea statică de durată se menține arcul sub sarcina de probă 48 de ore. Pentru a nu ține mașina imobilizată se utilizează sistemul din fig. 16.21.

Arcul-disc *1* este imobilizat pe dornul *2* printr-un sistem piuliță-contrapiuliță *3*. La scoaterea de sub sarcină se readuce montajul la mașina de încercat, se realizează o apăsare puțin superioară celei inițiale și se desfac piulițele. Se măsoară, de asemenea, deformația remanentă, care trebuie să se încadreze în limitele impuse.

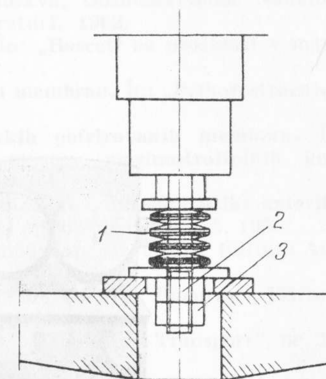



Fig. 16.21

### 16.6.2. Încercarea dinamică

La arcurile-disc, de o mare importanță este comportarea la șoc, ele fiind folosite în multe situații ca amortizoare de șoc. Defectele ascunse nu influențează vizibil comportarea la sarcina statică, dar influențează foarte mult comportarea la șoc. Încercarea dinamică constă din aplicarea asupra arcului a unei lovituri de ciocan, calculîndu-se după greutatea ciocanului și înălțimea de cădere, lucrul mecanic de șoc care trebuie preluat de arc. Arcurile cu fisuri interioare sînt astfel depistate și înlăturate.

## 16.7. Încercările arcurilor inelare

Încercarea arcurilor inelare urmărește trasarea caracteristicii de funcționare a acestora, deformația remanentă la sarcina de probă prescrisă și determinarea sarcinii de rupere.

Dat fiind importanța lor ca amortizoare pentru șocuri mari, materialului din care se execută aceste arcuri și tratamentul termic la care sînt supuse li se dă o atenție deosebită.

Încercarea statică se realizează la o mașină de încercat cu platouri între care se așază arcul inelar (fig. 16.22).

După supunerea la sarcină de probă se măsoară deformația remanentă. Încercarea de durată se realizează prin aplicarea statică a sarcinii

şi menţinerea sub sarcină 48 de ore. Se înregistrează, de asemenea, deformaţia remanentă a arcului.

Arcul este supus şi încercării dinamice în mod asemănător arcului inelar, prin aplicarea unei lovituri de ciocan. Inelele care se distrug sînt înlocuite fără a fi nevoie să se înlocuiască întreg arcul.

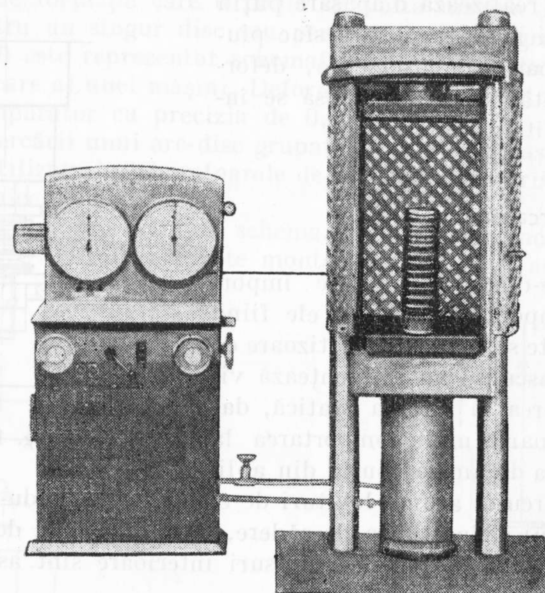


Fig. 16.22

Încercările de rezistenţă la oboseală se execută la prese cu excentric. Se înregistrează numărul de cicluri la care rezistă arcul pînă la rupere şi, funcţie de aceasta, numărul de cicluri pentru care arcul are o funcţionare sigură. Se măsoară deformaţia remanentă a arcului după numărul de cicluri prescris, urmărindu-se ca ea să se încadreze în limitele impuse.

*Cititorul este rugat să completeze acest chestionar și să-l trimită pe adresa:*
**Editura tehnică**
**Redacția Construcții de mașini**
**București, str. Știrbei Vodă nr. 37**

ELEMENTELE
ELASTICE
ALE
MAȘINILOR

Numele . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Întreprinderea la care lucrează . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Atelierul, Secția, Serviciul . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Profesiunea și funcția . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Studii . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Considerați că această carte vă este utilă, în ce măsură și din ce motive . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Ce cărți tehnice care să fie foarte utile activității dv. profesionale ați dori să edităm (titluri și, eventual, detalii cu privire la conținutul dorit) . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .